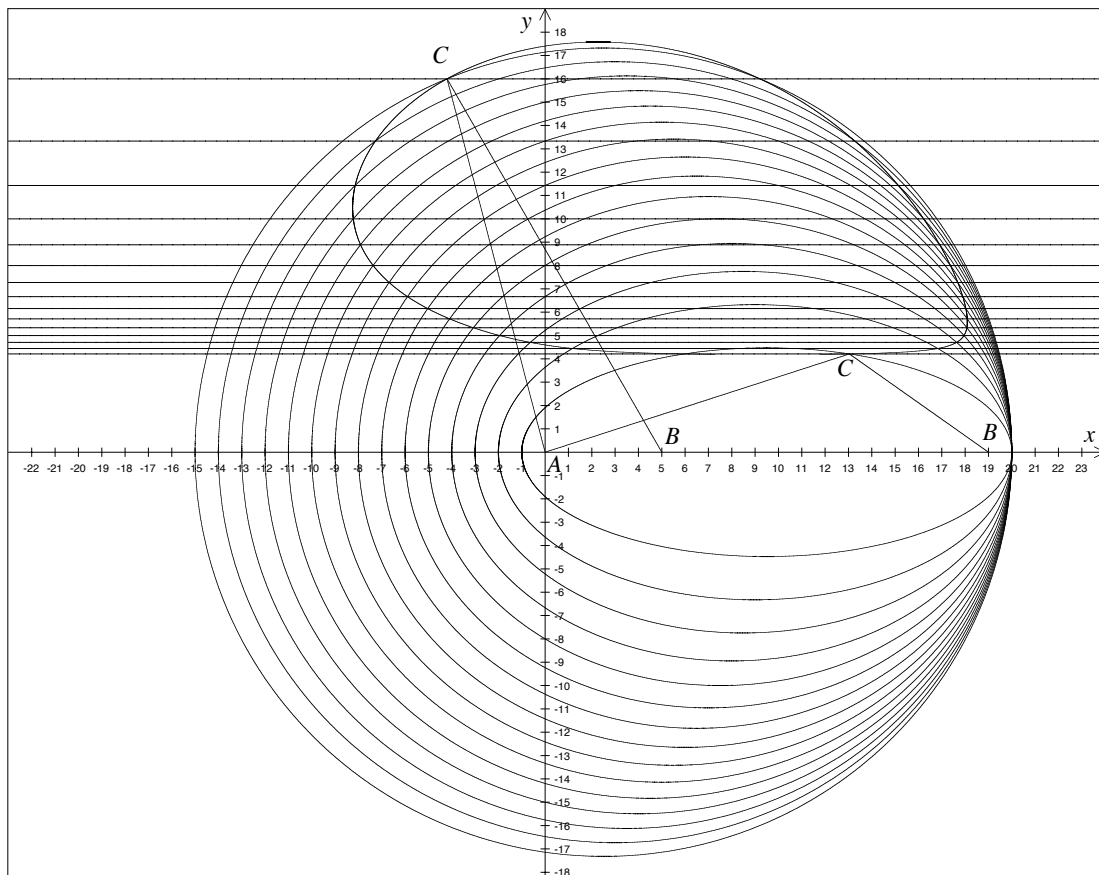




Bulletin

Januar 2013 – Janvier 2013

N° 121

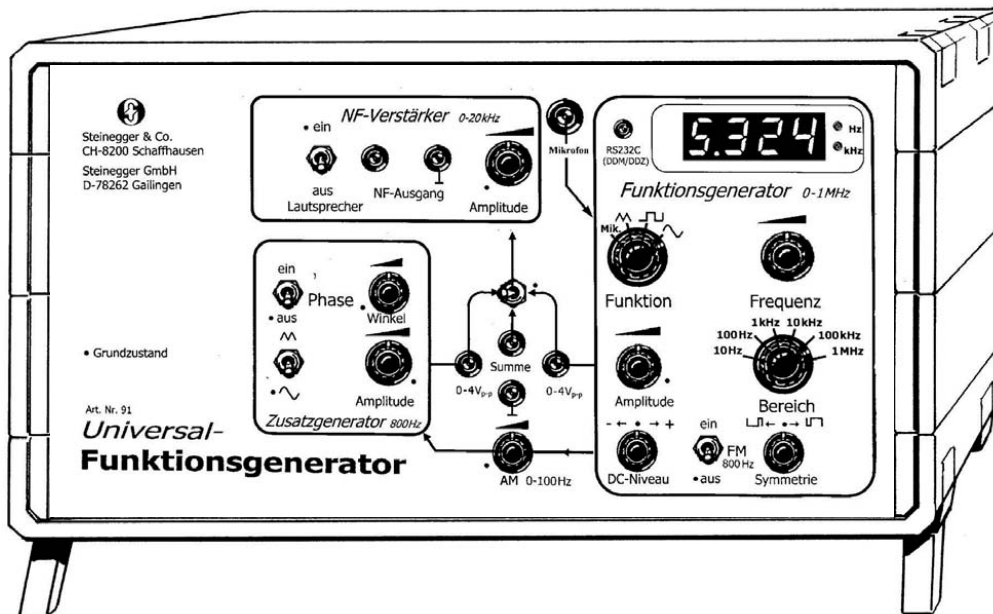


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Universal- Funktionsgenerator

Kompaktversion Art.Nr. 91



Das vielseitige Demonstrationsgerät für die Akustik, Schwingungs- und Wellenlehre sowie die Elektrik.

- **Funktionen: Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn**
- **Zwei Oszillatoren mit Synchronisationsmöglichkeit in beliebiger Phasenlage (für Interferenzversuche)**
- **Mikrofoneingang, NF-Verstärker, eingebauter Lautsprecher**
- **Frequenz- und Amplitudenmodulation**
- **Direkter Anschluss ans DDM und an den DDZ**
- **Ausführliche Bedienungsanleitung mit vielen Anwendungen**
- **Preis inkl. MWSt.: SFr. 1288.-**

Gerne senden wir Ihnen kostenlos die Kurzbeschreibung "Universal-Funktionsgeneratoren Nr. 91" zu.

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

DPK

Deutschscheizerische Physikkommission 3*Martin Lieberherr*
Verdunstungsrate 3*Nevzet Khasanov*
Maturaarbeit: Diffusionsnebelkammer 5**Commission Romande de Mathématiques** 8*Patrick Turtschy et Jean-Marc Ledermann*
Enquête et cours 2012 8**Deutschscheizerische Mathematikkommission** 12*Daniela Grawehr*
Begleitbrief 12*Beat Jaggi*
Plädoyer für das harmonische Mittel 13*Peter Gallin*
Dreiecke mit gleichem Umfang und gleichem Flächeninhalt 25*Hans Ulrich Keller*
Markow-Ketten 23*Torsten Linnemann*
Mathematikunterricht in der Fachmittelschule mit Lernumgebungen 27*Rainer Hauser*
Betrachtungen zur Kommutativität beim Potenzieren 33*Urs Stambach*
Aha! Mathematik! – Teil III 37*Marco Bettinaglio*
Frantz, Marc, Annalisa Crannell: Viewpoints: mathematical
perspective and fractal geometry in art 39

Kurse	Vom Kindergarten bis zur Hochschule – Mathematik im Unterricht	40
	Impressum	42

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Viele Dreiecke mit festem Umfang 40 und festem Flächeninhalt 40 (cf. page 25).

DPK

Verdunstungsrate

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

‘Der Dampfdruck ist ein Mass dafür, wie schnell eine Flüssigkeit verdunstet’, sag ich jeweils meinen Klassen. Ich verwende die Floskel ‘ein Mass für’ um Details zu verschleiern. Eine Lehrkraft sollte aber über entsprechendes Hintergrundwissen verfügen, sonst können die Schülerinnen und Schüler ja gleich selbständig mit einem Buch arbeiten. Folgendes Experiment habe ich durchgeführt, um Daten für eine Aufgabe zu gewinnen und mich selber etwas weiterzubilden.

Experiment

Ich klebte ein Thermoelement auf den Boden einer flachen Glasschale, stellte diese auf eine elektronische Waage und tarierte die Waage auf Null. Dann goss ich etwas heisses Wasser in die Schale und notierte die Temperatur sowie die Wassermasse als Funktion der Zeit, siehe Tabelle 1. Die Wasserschale stand frei auf dem Korpus, aber ich achtete darauf, Luftzug zu vermeiden.

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m (g)	359.30	355.06	351.88	349.60	347.79	346.33	345.11	344.05	343.17	342.40	341.70
ϑ (°C)	86.1	77.8	71.9	67.4	63.7	60.3	57.4	55.3	53.3	51.5	49.7

Tabelle 1: Masse m und Temperatur ϑ von heissem Wasser in einer offenen, flachen Glasschale als Funktion der Zeit t . Die Fehlerschranken sind etwa 0.1 min, 0.02 g und 0.2 °C.

Die Daten habe ich in einer Maturaufgabe verwendet. Die Schülerinnen und Schüler sollten zuerst die Wassermasse m als Funktion der Zeit t darstellen, siehe Abbildung 1. Das ist den meisten auch gelungen. Danach sollten sie den Verlauf durch eine Funktion mit Parametern beschreiben und für die Parameter Schätzwerte angeben. Das haben die wenigsten geschafft; $m \propto 1/t$ war der häufigste Fehlgriff. Mit ‘Exponentialfunktion’ war ich bereits zufrieden.

Abbildung 1: Die Masse des heissen Wassers in einer flachen Schale nimmt mit der Zeit ab, weil Wasser verdunstet. Die Daten sind aus Tabelle 1. Die gezeichnete Fitfunktion ist

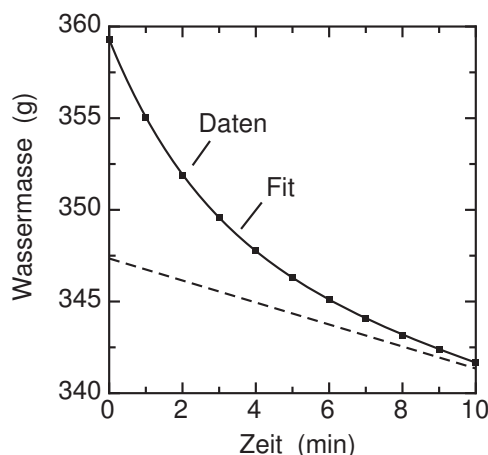
$$m(t) = a \cdot e^{-t/b} + c + d \cdot t \quad \text{mit}$$

$$a = 11.94 \text{ g}, \quad b = 2.76 \text{ min},$$

$$c = 347.35 \text{ g}, \quad d = -0.600 \text{ g/min}$$

Die gestrichelte Linie ist die Asymptote

$$m = c + d \cdot t$$



Die gesuchte Funktion $m(t)$ muss abnehmend sein. Bei $t = 0$ ist die Steigung endlich. Für grössere Zeiten ist die Asymptote eine leicht fallende Gerade (in Abbildung 1 gestrichelt gezeichnet), denn dann ist die Temperatur konstant und die Verdunstungsrate auch. Die Formel muss einheitenmässig konsistent sein. Eine mögliche Funktion ist in der Legende von Abbildung 1 beschrieben.

Als nächstes liess ich von den Schülerinnen und Schülern die relevanten Energieumsätze berechnen: Wie viel Wärme gibt das Wasser während der ersten Minute ab?

$$\Delta Q = cm\Delta\vartheta = 4182 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 0.355 \text{ kg} \cdot (86.1 - 77.8) \text{ }^\circ\text{C} = \underline{\underline{12 \text{ kJ}}}$$

Wie gross ist die Verdunstungswärme während der ersten Minute?

$$\Delta Q = \Delta mL_V = (359.30 - 355.06) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 2.3084 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = \underline{\underline{9.79 \text{ kJ}}}$$

Diese Rechnung zeigt, dass der grösste Teil der Wärme durch Verdampfung abgeführt wird. Es lohnt sich also, beim Kochen den Deckel auf die Pfanne zu legen.

Theorie

Zurück zum Problem in der Einleitung: Könnte die Verdunstungsrate proportional zum Dampfdruck sein? Der Dampfdruck einer Flüssigkeit gehorcht in erster Näherung der August'schen Formel:

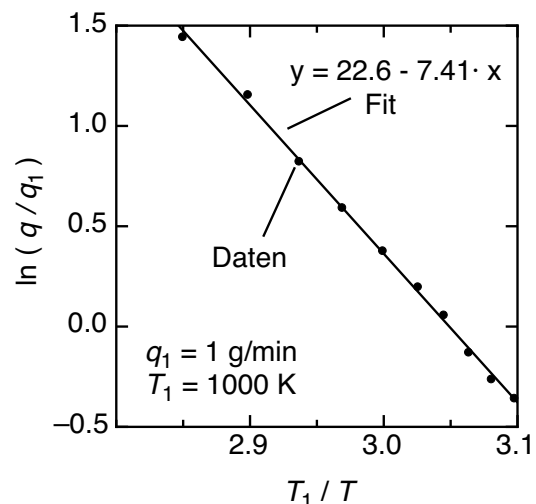
$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{T_0}{T}\right) \quad \text{Dampfdruck nach Ernst Ferdinand August, moderne Schreibweise}$$

Man erkennt in der August'schen Dampfdruckgleichung unschwer den Boltzmannfaktor $\exp(-W/kT)$, der auch in der Arrheniusgleichung der Reaktionskinetik eine dominante Rolle spielt. Falls also die Verdunstungsrate proportional zum Dampfdruck ist, sollte eine fallende Gerade erscheinen, wenn man den Logarithmus der Verdunstungsrate als Funktion der inversen absoluten Temperatur abträgt, siehe Abbildung 2. Diese Darstellungsweise wird Arrhenius-Plot genannt.

Abbildung 2: Logarithmus der Verdunstungsrate q als Funktion der inversen, absoluten Temperatur T . Die Messwerte liegen näherungsweise auf einer fallenden Geraden.

Die Verdunstungsrate ist die Differenz aufeinander folgender Wägungen, siehe Tabelle 1, pro Minute. Als Temperatur wurde der Wert am Ende des jeweils betrachteten 1min-Intervalls genommen. Man müsste hier eine Art mittlere Temperatur verwenden. Diese Unschärfe verbietet es, die Parameterwerte aus der linearen Regression genauer zu interpretieren. Man müsste nämlich noch prüfen, ob Dampfdruck und Verdunstungsrate denselben Boltzmannfaktor haben.

1. 11. 2012, Lie.



Diffusionsnebelkammer

Die sichtbare Radioaktivität



Maturaarbeit

Nevzet Khasanov, Alte Kantonsschule Aarau 2012

nevzet@bluewin.ch

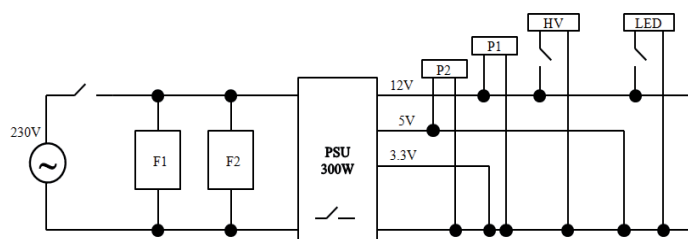
Ist die Radioaktivität sichtbar?

Das vorgestellte Projekt beschreibt den Zusammenbau einer luftgekühlten Diffusionsnebelkammer mit Peltier-Elementen sowie die Experimente, die mit der erstellten Nebelkammer durchgeführt wurden. Das Hauptziel besteht darin, die unsichtbare Radioaktivität zu visualisieren, um dieses Phänomen der Öffentlichkeit zu demonstrieren.

Design und Konstruktion:

Detektionsfläche: 110mm x 130mm/ 140mm x 170mm

Betriebstemperatur: -35°C (bei +30°C Aussentemperatur) und -40°C (bei +25°C Aussentemperatur)



Schaltsystem:

F1 & F2: Lüfter

PSU: PC-Netzteil 300W)

P1: Untere Peltier-Elemente

P2: Obere Peltier-Elemente

HV: Hochspannungsgitter

LED: LED-Beleuchtung

Abb.1. Schaltkreis der Diffusionsnebelkammer

Besonderheiten der erstellten Diffusionsnebelkammer mit Peltier-Elementen:



Abb.2. Fertiggestellte Diffusionsnebelkammer mit Peltier-Elementen

Luftgekühlt: Kein Trockeneis, flüssiger Stickstoff oder Kompressoren für den Betrieb notwendig

Detektionsfläche: 110 mm x 130 mm/140mm x 180mm;
Zusammengesetzt aus nicht magnetischen Komponenten
(Ermöglicht die Durchführung der Experimente im Magnetfeld)

Klein und mobil: Masse: 20 cm x 35 cm x 25 cm; Gewicht: 6 kg

Betriebszeit: Kurze Startzeit (erste „Spuren“ bereits sichtbar in 7-10 min.); Dauerbetrieb bis zu 12h getestet

Preis: 80% tiefer als eine kompressorgekühlte Nebelkammer

Einzige Konstruktion: Keine identische Konstruktion zurzeit bekannt

Durchgeführte Experimente:

- Visualisierung der natürlichen Radioaktivität (α , β , γ , ohne Quelle)
- Bestimmung der Teilchensorten
- Beobachtung von Kollisionen der geladenen Teilchen (Veränderung der Bahn; "secondary ionization" - δ -Elektronen)
- Beobachtung radioaktiver Zerfälle von verschiedenen Quellen (U-238, Rn-220, Am-241, Sr-90, Cs-137, Co-60)
- Ablenkung der β -Teilchen im Magnetfeld und Bestimmung deren Ladung, sowie die Berechnung der Geschwindigkeit und der Energie.
- Berechnung der Halbwertszeit von Rn-220 (Berechnet: 58 sec.; Literaturwert: 55sec).
- Beobachtung und Analyse des Compton Effekts
- Beobachtung von kosmischen Teilchen in grösseren Höhen (Schweizer Alpen)

Experimente – Highligts:

Ablenkung der Betastrahlung im Magnetfeld:



$$\left. \begin{aligned} F_{ZP} &= F_L \\ m_e \frac{v_s^2}{r} &= Q_e v_s B \\ \frac{BrQ_e}{m_e} &= v_s \end{aligned} \right\} \text{Klassischer Ansatz}$$

Relativistische Korrektur

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E = mc^2$$

Abb.3. Ablenkung von β -Teilchen (β^+ ; β^-) im Magnetfeld

Teilchen	m_0 (kg)	Q (C)	r (m)	v_{NR}/c	v_R/c	m/m_0	E (MeV)
e^+	$9.1 * 10^{-31}$	$+1.6 * 10^{-19}$	0.015	10.56	0.956	3.409	1.74
e^-	$9.1 * 10^{-31}$	$-1.6 * 10^{-19}$	0.005	3.52	0.882	2.122	1.08

Tabelle 1: Ergebnisse der Ablenkung der β -Teilchen (β^+ , β^-) im Magnetfeld. m_0 ist die Ruhemasse des Teilchens (Elektron/ Positron), Q ist die Ladung, r ist der Radius des abgelenkten Teilchens, v_{NR} ist die Geschwindigkeit des Teilchens nach dem Klassischen Modell, v_R ist die Geschwindigkeit der Teilchen nach dem relativistischen Modell, m ist die relativistische Masse des Teilchens, E ist die Energie des Teilchens

Zerfall von Radon-220:



Abb.4. Zerfall von Rn-220 nach 10 sec.

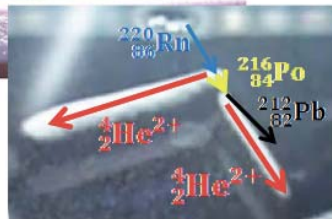
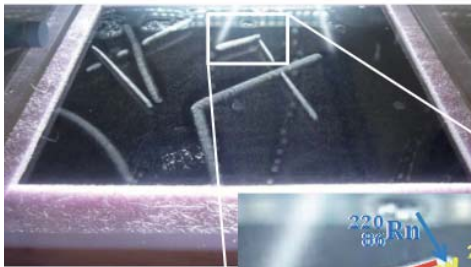
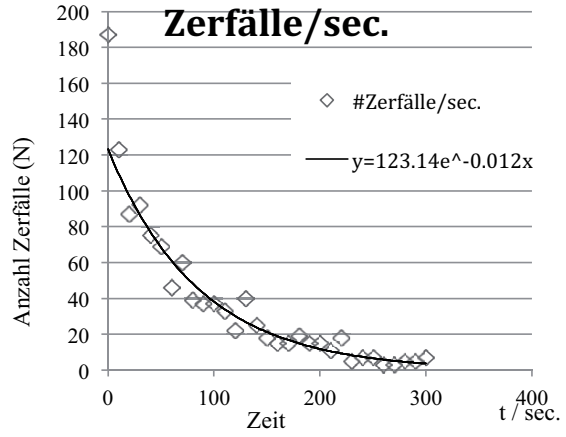


Abb.5. Zerfall von Rn-220 nach 180 sec.



$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln(2)$$

$$t_{\frac{1}{2}} = 58 \text{ sec.} \quad t_{\frac{1}{2}}(\text{Literature value}) = 55 \text{ sec.}$$

Auszeichnungen

- Gewonnen bei „Schweizer Jugend forscht 2012“ in Lugano (Prädikat: Hervorragend)
- **2. Platz** bei „European Union Contest for Young Scientists 2012“ in Bratislava



Cours CRM 2012

Sujets d'application des mathématiques

1 Enquête réalisée par la CRM

Dans le but d'organiser un cours sur les thèmes abordés dans l'OS application des mathématiques, la CRM a réalisé une enquête courant 2011, afin de dresser la liste des sujets traités dans ces cours. Nous avons été surpris par la richesse et la diversité des thèmes étudiés. Il vaut ici la peine de mentionner les résultats de cette enquête, comme les a présentés Jean-Marc à Leysin. Ces sujets peuvent être répartis en trois catégories :

Méthodes géométriques

- Géométrie descriptive, Monge, affinité axiale, homologie, étude des cônes, Dandelin Perspective
- Axonométrie
- Polygones réguliers, Polyèdres (formule d'Euler)
- Géométrie sphérique
- Diverses activités géométriques avec Cabri

Méthodes numériques

- Initiation à la programmation en C , Pascal, Python, JavaScript, Visual Basic, MuPad, Mathematica, Latex, RobotProg, Excel
Étude de quelques algorithmes : schéma de Horner, tri, Euclide, méthode de Monte Carlo et applications aux jeux, applications de la théorie des graphes (Page Ranking)
- Résolution d'équations et de systèmes d'équations
- Interpolations linéaires, quadratiques, cubiques, Lagrange, splines, moindres carrés, courbes paramétriques, cinématique, courbes de Bézier
- Intégration numérique
- Équations différentielles
- Développements en séries Taylor
- Séries de Fourier et traitement de signal
- Méthodes d'approximation (décimales de π), calcul d'erreur
- Nombres pseudo-aléatoires, tests d'hypothèses
- Infographie (tracés de droites, cercles et coniques avec Bresenham)

- Courbes fractales
- Codes correcteurs d'erreurs
- Codes binaires
- Modifications d'images (couleurs et formes)

Divers

- Cryptographie
- Théorie des graphes
- Algèbre financière et simulation du cours d'une action, prix d'une option
- Programmation linéaire
- Statistiques
- Chaînes de Markov
- Dynamique des populations
- Systèmes électoraux
- Modélisation avec Stella
- Histoire des sciences
- Congruence et équations diophantiennes
- Suites et séries
- Topologie générale
- Théorie des groupes (Polyèdres et théorie de Galois)
- Logique des propositions et logique des prédicats

Vous pouvez trouver, sur le site de la CRM, <http://www.sspmp.ch/crm/AdM.htm>, des documents fournis par les collègues pour certains de ces cours (numéros à côté des titres). Nous vous invitons à compléter cette liste.

2 Cours de Leysin

Quelques collègues ont été d'accord de présenter leur travail dans le cadre de l'enseignement de l'application des mathématiques. Nous avons complété ces interventions par des exposés de M. Jean-Pierre Renfer, du bureau des méthodes de l'Office fédéral de la statistique et de M. David-Olivier Jaquet-Chiffelle, de l'université de Lausanne.

Dès que le cours fut annoncé, il a rencontré un vif succès et c'est avec regret que nous avons dû refuser du monde. Nous prions ici les collègues qui n'ont pu venir de nous excuser. Le nombre de participant s'est élevé à 45, auquel il faut ajouter les 7 conférenciers et les 2 organisateurs.

Brefs résumés des présentations

Jean-Marc Ledermann nous a présenté ce qui était enseigné au Lycée Denis de Rougemont (LDDR), à Neuchâtel. De la perspective aux ensembles de Julia, en passant par les méthodes numériques telle que la méthode de la bisection ou la méthode de Newton, les courbes de Bézier ou le traitement d'images, Jean-Marc nous a présenté la diversité et la qualité de travaux que l'on peut faire dans une telle discipline.

Jean-Pierre Renfer, chef suppléant du service des méthodes statistiques à l'Office fédéral de la statistique, nous a montré, à l'aide d'exemples fortement imagés, l'importance et de la manière de choisir un échantillon pour évaluer un caractère d'une population (être rouge pour une bille) et de la façon de donner un résultat, toujours avec une précision spécifiée. Sur un exemple choisi de loyer dans une commune et de prix moyen, il nous a rappelé ce qu'était un intervalle de confiance, et nous a montré les différentes manières de choisir un échantillon, ainsi que des résultats différents auxquels ces choix peuvent conduire. Balles de ping-pong et M& M's ont convaincu l'assistance, ont montré que les statistiques pouvaient être abordées de manière ludique.

Jean-Philippe Javet, du collègue de Morges, nous a quant à lui, présenté son cours sur la programmation linéaire. Outre l'intérêt du sujet présenté, les participants ont pu apprécier les astuces géométriques utilisées pour déterminer la solution optimale. La présentation de l'algorithme du simplexe enfin simplement expliquée et illustrée dans un cours qui fait appel tant à l'algèbre matricielle qu'à l'axonométrie.

Fabien Augsburg, du collège de Gambach de Fribourg, nous a parlé du cours d'une call-option et comment le déterminer. A l'aide d'un exemple concret (une certaine action se trouvant sur le site [swissquote](http://www.swissquote.com)), il a réussi à nous faire comprendre de manière simple les mécanisme en jeu, tout en nous avertissant que dans la réalité, c'était bien plus compliqué que ça. Quelques exercices adaptés nous ont permis de bien comprendre une partie de ces mécanisme qui font rêver certains et qui plument d'autres.

Un tout autre sujet a été traité par Pierre Frachebourg, du collège de l'Abbaye de St-Maurice. Il nous a montré les remarquables représentations en 2D de situations se déroulant en 3D. Représentation de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, représentation d'un tétraèdre tournant dans l'espace. Et ceci avec uniquement un logiciel de géométrie plane, Cabri-géomètre. L'utilisation de lieux de points a permis également d'utiliser les capacités du logiciel pour illustrer des propriétés géométriques importantes. La présentation de travaux de maturité a montré que certains élèves pouvaient se passionner pour ces dessins géométriques.

David-Olivier Jaquet-Chiffelle, de l'École des sciences criminelles de l'Université de Lausanne, nous a parlé du code de Vigenère et de la manière de le casser. À l'aide de la méthode de Kasiski, de l'indice de coïncidence et l'indice mutuel de coïncidence, il est parvenu à découvrir la clef qui avait permis de coder un message selon Vigenère¹².

Le deuxième exposé de M. Jaquet-Chiffelle était consacré au code RSA. À l'aide d'exemples bien « choisis » (mais le canton était-il bien choisi ? (*ndlr*), il nous a montré le rôle et l'importance des certificats dans les clefs que nous pouvons utiliser. Après avoir expliqué le principe de fonctionnement du code RSA, David-Olivier nous a fait comprendre, à travers un exemple particulier, les conditions nécessaires pour qu'un tel codage soit efficace. Les connaissances de M. Jaquet-Chiffelle sur la cryptologie ont été très appréciées des participants.

Didier Müller, du Lycée cantonal de Porrentruy, nous a présenté, à travers des problèmes classiques et connus (ponts de Königsberg, lemme des poignées de mains, Sudoku, ...) un aperçu de la théorie des graphes, telle qu'il l'a exposée plus complètement dans le cahier no 6 de la CRM intitulé : **Introduction à la théorie des graphes**. Les quelques exercices proposés ont permis aux participants de prendre une part active à ce cours.

Marti Ruiz-Altaba nous a présenté quant à lui l'approche d'une étude des codes binaires, telle qu'il l'enseigne en option spécifique au collègue Madame de Staël de Genève. Sur un exemple simple et d'actualité, il a nous a montré comment fonctionnait le code de Huffmann. S'en est suivi un exposé sur les codes à répétition R2 et R3 ainsi que sur la notion de distance et des codes de Hamming.

Et pour finir, Didier Müller a corrigé les exercices qu'il nous avait donnés à faire la veille. Il nous a également présenté son article paru dans le bulletin n° 120 de la SSPMP sur les échelles de mots, inspirés des doublets de Lewis Carroll³. S'en est suivi un exposé sur le « pagerank » utilisé par Google. Se référer à l'article de notre collègue Paul Jolissaint paru dans le bulletin n° 119 de juillet 2012.

3 Conclusion

Le cours a fortement été apprécié des participantes et des participants. On peut dans tous les cas remercier les conférenciers pour l'important travail accompli, la qualité des présentations et l'ouverture aux commentaires dont ils ont fait preuve. Les collègues ont échangé durant cette semaine sur leurs travaux et sur leurs pratiques. La richesse et la variété des sujets ne peut que nous inciter à plus de curiosité et de d'approfondissement dans ce domaine d'enseignement qu'est l'application des mathématiques.

Nous tenons également, en tant qu'organisateur, à remercier toutes les personnes ayant participé à ce cours, pour leur patience et leur compréhension face aux petits problèmes techniques rencontrés.

Patrick Turtzschy et Jean-Marc Ledermann

¹voir le site : <http://www.apprendre-en-ligne.net/crypto/menu/>

²voir le cahier no 2 de la CRM intitulé **Cryptologie**, de Nicolas Martignoni

³www.nymphomath.ch/graphes/doublets/info/comment



Deutschscheizerische Mathematikkommission (DMK) des
Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte



Schwyz, im Januar 2013

Umfrage zum Lehrmittelkatalog der DMK

Geschätzte Mathematiklehrerkollegin!
Geschätzter Mathematiklehrerkollege!

In der Schweiz herrscht an den Gymnasien Lehrmittelfreiheit, eine Freiheit, die wir sehr schätzen, die aber im Ausland nicht selbstverständlich ist. Eine Aufgabe der DMK als Standesvertretung der Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer in der deutschsprachigen Schweiz ist es, Lehrmittel zu publizieren, um Sie in Ihrer täglichen Arbeit zu unterstützen.

Unser Lehrmittelkatalog bedarf einer gründlichen Auffrischung. Um dabei Ihre Wünsche zu berücksichtigen, bitten wir Sie um Ihre Rückmeldung mithilfe des Online-Fragebogens.

Die Beantwortung kann unter <https://de.surveymonkey.com/s/DMKLehrmittel> bis Ende Februar erfolgen und wird ehrliche 15 Minuten in Anspruch nehmen.

Wir bitten Sie, Ihr Fachkollegium über die Umfrage in Kenntnis zu setzen und mit dem Link zur Umfrage zu bedienen.

Wir bedanken uns im Voraus und grüssen freundlich

Daniela Grawehr
Präsidentin DMK

Plädoyer für das harmonische Mittel

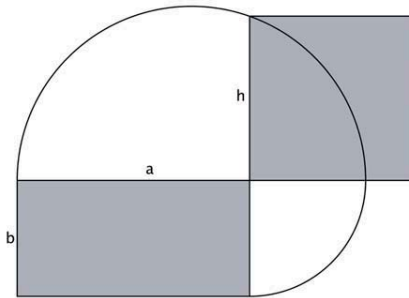
Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

Das Bilden von Mittelwerten ist ein zentrales Konzept in der Mathematik (siehe z.B. [1], [2], [7] oder [8]). Im Mathematikunterricht wird vorwiegend das arithmetische, gelegentlich das geometrische Mittel thematisiert. Das ist verständlich, ist das arithmetische Mittel doch immerhin eines der wichtigen Lagemaße in der beschreibenden Statistik:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Mit dem geometrischen Mittel gelingt unter anderem die "Quadratur des Rechtecks": Soll ein gegebenes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden, dann ist die Seite des gesuchten Quadrates gleich dem geometrischen Mittel von Länge und Breite des vorgegebenen Rechtecks.



$$\text{Höhensatz: } h^2 = a \cdot b \implies h = \sqrt{a \cdot b}$$

2 Das harmonische Mittel

Im Folgenden soll das harmonische Mittel im Zentrum der Betrachtungen stehen. Es zeigt sich, dass dieser Mittelwert in überraschend vielen verschiedenen mathematischen und aussermathematischen Kontexten auftaucht.

Das harmonische Mittel von zwei Zahlen

Für zwei reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ mit $a + b \neq 0$ ist das harmonische Mittel $\mathcal{H}(a, b)$ definiert durch

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a + b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Beispiel: Das harmonische Mittel von 1 und 3 ist $\mathcal{H}(1, 3) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Das harmonische Mittel hängt mit dem arithmetischen Mittel zusammen:

$$\frac{1}{\mathcal{H}(a, b)} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Der Kehrwert des harmonischen Mittels zweier Zahlen a und b ist gleich dem arithmetischen Mittel der Kehrwerte von a und b .

Das harmonisches Mittel von n Zahlen

Sei $n \geq 2$. Für n positive reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n definieren wir

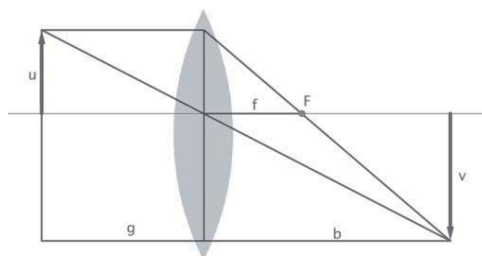
$$\mathcal{H}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

3 Das harmonische Mittel in aussermathematischen Kontexten

Es folgt eine (sicher nicht abschliessende) Liste von Themen, bei denen das harmonische Mittel vorkommt.

3.1 Die Linsengleichung

Eine Linse bildet einen Gegenstand der Länge u auf das Bild der Länge v ab.



Für die Brennweite f , die Gegenstandsweite g und die Bildweite b gilt die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \implies f = \frac{gb}{g+b} = \frac{1}{2} \mathcal{H}(g, b)$$

Die Brennweite f ist also gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Gegenstandsweite g und der Bildweite b . (siehe z.B. [6])

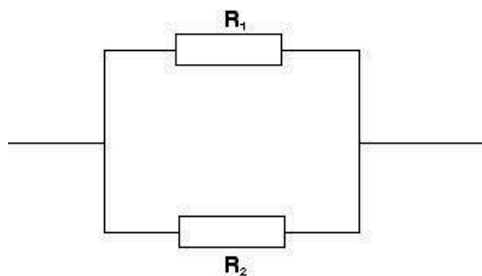
Begründung: Mit obigen Bezeichnungen und den Strahlensätzen gilt:

$$\frac{g}{f} = \frac{u+v}{v} = \frac{g+b}{b} = \frac{g}{b} + 1.$$

Aus $\frac{g}{f} = \frac{g}{b} + 1$ folgt sofort (Division mit g): $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$.

Also ist tatsächlich $f = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{g}} = \frac{gb}{g+b} = \frac{1}{2} \mathcal{H}(g, b)$. □

3.2 Parallelschaltung von Widerständen in elektrischen Schaltkreisen



Bei der Parallelschaltung der Widerstände R_1 und R_2 in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Der Gesamtwiderstand R ist die Hälfte des harmonischen Mittels der Widerstände R_1 und R_2 .

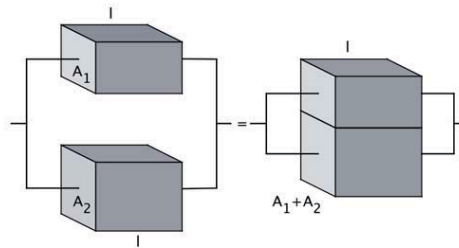
$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \mathcal{H}(R_1, R_2)$$

1. Begründung: Der Gesamtstrom I ergibt sich aus der Summe der Einzelströme, die durch die einzelnen Widerstände fließen.

Dann folgt mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$\frac{U}{R} = I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \implies \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

2. Begründung: Man veranschaulicht sich diesen Zusammenhang an der Parallelschaltung zweier Widerstände, die sich nur in ihrer Querschnittsfläche A unterscheiden. Dabei ist $\rho = \frac{R \cdot A}{l}$ der spezifische Widerstand, der vom Material der Widerstände abhängt.



$R = \frac{\rho l}{A_1 + A_2}$ und daher

$$\frac{1}{R} = \frac{A_1 + A_2}{\rho l} = \frac{A_1}{\rho l} + \frac{A_2}{\rho l} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

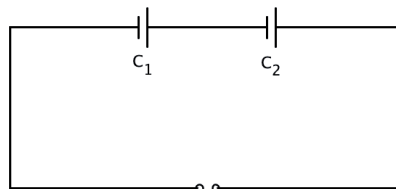
Also ist tatsächlich $R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \mathcal{H}(R_1, R_2)$ □

(siehe z.B. [6])

Verallgemeinerung: Bei der Parallelschaltung der Widerstände R_1, R_2, \dots, R_n in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Der Gesamtwiderstand R ist gleich $\frac{1}{n}$ mal das harmonische Mittel der Widerstände R_1, R_2, \dots, R_n .

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{n} \mathcal{H}(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

3.3 Serieschaltung von Kondensatoren in elektrischen Schaltkreisen



Bei der Serieschaltung von zwei Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 und C_2 in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Die Gesamtkapazität C ist gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Kapazitäten C_1 und C_2 . (siehe z.B. [6])

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \mathcal{H}(C_1, C_2)$$

Begründung: Die Kapazität C ist gegeben durch $C = \frac{Q}{U}$, also ist $U = \frac{Q}{C}$.

Bei Serieschaltung ist die Gesamtspannung gleich der Summe der Teilspannungen an den beiden Kondensatoren; also wird:

$$\frac{Q}{C} = U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \implies \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \square$$

Verallgemeinerung: Bei der Serieschaltung von n Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2, \dots, C_n in einem elektrischen Schaltkreis gilt: Die Gesamtkapazität C ist gleich $\frac{1}{n}$ mal das harmonische Mittel der Kapazitäten C_1, C_2, \dots, C_n .

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} = \frac{1}{n} \mathcal{H}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

3.4 Durchschnittsgeschwindigkeit

Ein Zug fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit v_1 von A nach B und mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit v_2 zurück von B nach A .

Dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit für beide Strecken gleich dem harmonischen Mittel von v_1 und v_2 .

$$\bar{v} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \mathcal{H}(v_1, v_2)$$

Begründung: Die Länge der Strecke von A nach B sei x . Dann braucht der Zug für die Hinfahrt $t_1 = \frac{x}{v_1}$, für die Rückfahrt $t_2 = \frac{x}{v_2}$.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit für Hin- und Rückfahrt beträgt also

$$\bar{v} = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{2x}{\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \mathcal{H}(v_1, v_2) \quad \square$$

Verallgemeinerung: Werden n gleich lange Strecken mit den Geschwindigkeiten v_1, v_2, \dots, v_n durchlaufen, dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit gleich dem harmonischen Mittel von v_1, v_2, \dots, v_n .

$$\bar{v} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}} = \mathcal{H}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

3.5 Gefäße füllen

Rohr 1 fülle ein Gefäß in der Zeit t_1 , Rohr 2 fülle das gleiche Gefäß in der Zeit t_2 . Dann füllen die beiden Rohre das Gefäß zusammen in der Zeit

$$t = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{1}{2} \mathcal{H}(t_1, t_2)$$

Begründung: Ist V das Volumen des Gefäßes, dann gilt:

$$\frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2} = \frac{V}{t} \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} \quad \square$$

Verallgemeinerung: Rohr 1 fülle ein Gefäß in der Zeit t_1 , Rohr 2 in der Zeit t_2 , ..., Rohr n in der Zeit t_n . Dann füllen alle Rohre zusammen das Gefäß in der Zeit

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}} = \frac{1}{n} \mathcal{H}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

3.6 Benzinverbrauch von Autos

Um den Benzinverbrauch von Autos zu messen oder zu vergleichen, werden normalerweise zwei Masse verwendet: In Europa Liter pro 100 Kilometer und in den USA Meilen pro Gallone. Die Einheiten der beiden Masse sind in gewisser Weise invers zueinander, einmal Volumen/Distanz und einmal Distanz/Volumen.

Seien x_1, x_2, \dots, x_n Verbräuche in Liter pro 100 km und y_1, y_2, \dots, y_n die entsprechenden Verbräuche in Meilen pro Gallone.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \mathcal{H}(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \mathcal{H}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \mathcal{A}(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Rechnet man das arithmetische Mittel von Verbräuchen in Liter pro 100 km um, dann bekommt man gerade das harmonische Mittel der Verbräuche in Meilen pro Gallone. Rechnet man das harmonische Mittel von Verbräuchen in Liter pro 100 km um, dann bekommt man gerade das arithmetische Mittel der Verbräuche in Meilen pro Gallone.

Begründung: Mit den Umrechnungen 1 Gallone ≈ 3.78541178 Liter und 1 Meile ≈ 1.609344 Kilometer ist

$$\begin{aligned} x \text{ Liter auf 100 Kilometer} &= \frac{1.609344x}{100} \text{ Liter auf 1 Meile} \\ &= \frac{1.609344x}{100 \cdot 3.78541178} \text{ Gallonen auf 1 Meile} \\ &= \frac{100 \cdot 3.78541178}{1.609344x} \approx \frac{235.2}{x} \text{ Meilen pro Gallone.} \end{aligned}$$

Die Umrechnung von Litern pro 100 km in Meilen pro Gallone geschieht also mit einer Funktion der Form $f(x) = \frac{c}{x}$. Die Behauptung folgt nun mit den Überlegungen von Abschnitt 4.6. \square

3.7 Musik

Wenn zwei Saiten im Abstand einer Oktave klingen, muss bekanntlich die Frequenz der zweiten Saite doppelt so hoch, die schwingende Saite also halb so lang sein.

Das harmonische Mittel von 1 und $\frac{1}{2}$ ist $\frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$; diese Seitenlänge erzeugt die Quinte. Dass dieses Intervall harmonisch zwischen Grundton und Oktave liegt, das war schon Pythagoras bekannt.

Das harmonische Mittel von 1 und $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$; diese Seitenlänge erzeugt die grosse Terz. Siehe z.B. [4]

3.8 Weitere Beispiele

1. F_1 ist in der Statistik ein Mass für die Zuverlässigkeit eines Testes. Dabei ist p (Präzision) die Zahl der korrekten Resultate geteilt durch die Zahl aller erhaltenen Resultate und r ist die Zahl der korrekten Resultate geteilt durch die Zahl der Resultate, die man eigentlich hätte erhalten sollen.

$$\text{Es ist } F_1 = \frac{2pr}{p+r} = \mathcal{H}(p, r)$$

2. In der Festkörperphysik wird für die Netzung von organischen Flüssigkeiten und Wasser auf polymeren Werkstücken die Grenzflächenenergie mit dem harmonischen Mittel berechnet.
3. Zum Schluss noch eine Anwendung im Baseball, ohne Übersetzung und ohne Kommentar:
"In sabermetrics, the Power-speed number of a player is the harmonic mean of his home run and stolen base totals."

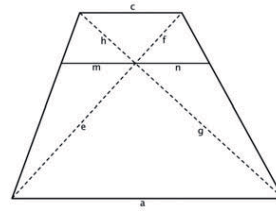
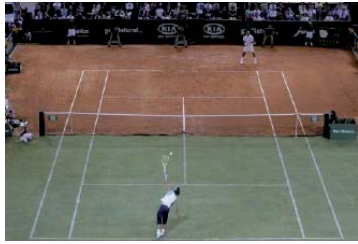
Quellen (Abruf: Mai 2012):

1. http://de.wikipedia.org/wiki/Beurteilung_eines_Klassifikators
2. <http://www.unimeter.net/interim/Oberflaechenspannung/ZurOberflaechenspannung1.htm>
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_mean

4 Das harmonische Mittel in innermathematischen Kontexten

4.1 Perspektivische Ansicht eines Rechtecks

Schaut man sich im Fernsehen ein Tennisspiel an, dann sieht man das rechteckige Spielfeld als Trapez. Das Netz teilt den Tennisplatz in zwei gleiche Halfen. Die Netzunterkante geht dabei durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes (resp. des Rechtecks).



Behauptung: Wird ein Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die "Mittellinie" durch den Diagonalenschnittpunkt geht, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem harmonischen Mittel von a und c .

Beweis: Mit den Bezeichnungen von oben und den Strahlensatzen gilt:

$$\frac{c}{m} = \frac{e+f}{e} = 1 + \frac{f}{e} = 1 + \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c}{n} = \frac{g+h}{g} = 1 + \frac{h}{g} = 1 + \frac{c}{a}$$

Also ist $\frac{c}{m} = \frac{c}{n}$ und folglich $m = n$.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{c}{m} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a} \implies ac = m(a+c) \implies m = \frac{ac}{a+c}$$

Die gesuchte Länge hängt also nur von a und c ab und beträgt

$$m + n = \frac{2ac}{a+c} = \mathcal{H}(a, c) \quad \square$$

4.2 Harmonische Teilung

Eine Strecke AB wird durch die Punkte T_i (zwischen A und B) und T_a (außerhalb von AB) harmonisch geteilt, wenn gilt:

$$\frac{\overline{AT_i}}{\overline{BT_i}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{BT_a}}$$



Behauptung: Ist die Strecke AB durch T_i und T_a harmonisch geteilt, dann ist die Strecke T_iT_a das harmonische Mittel der Strecken AT_a und BT_a .

$$\overline{T_iT_a} = \frac{2\overline{AT_a} \cdot \overline{BT_a}}{\overline{AT_a} + \overline{BT_a}} = \mathcal{H}(\overline{AT_a}, \overline{BT_a})$$

Beweis: Neben $\frac{\overline{AT_i}}{\overline{BT_i}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{BT_a}}$ gilt auch $\overline{AT_i} = \overline{AT_a} - \overline{T_iT_a}$ und $\overline{BT_i} = \overline{T_iT_a} - \overline{BT_a}$.

Also ist

$$\frac{\overline{AT_a} - \overline{T_iT_a}}{\overline{T_iT_a} - \overline{BT_a}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{BT_a}}$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{T_iT_a} = \frac{2\overline{AT_a} \cdot \overline{BT_a}}{\overline{AT_a} + \overline{BT_a}} = \mathcal{H}(\overline{AT_a}, \overline{BT_a}) \quad \square$$

4.3 Approximation von Quadratwurzeln

Für das Berechnen oder Approximieren von Quadratwurzeln gibt es einen wohlbekannten Algorithmus, der oft *Heron* zugeschrieben wird:

\sqrt{a} sei eine irrationale Zahl und α_1 sei eine erste grobe Näherung. Dann ist auch $\beta_1 = \frac{a}{\alpha_1}$ eine Näherung von \sqrt{a} , weil ja $\alpha_1 \cdot \beta_1 = a = \sqrt{a}\sqrt{a}$ gilt.

Es ist bekannt, dass dann $\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ und auch $\beta_2 = \frac{a}{\alpha_2}$ bessere Näherungen von \sqrt{a} sind. Zudem wird

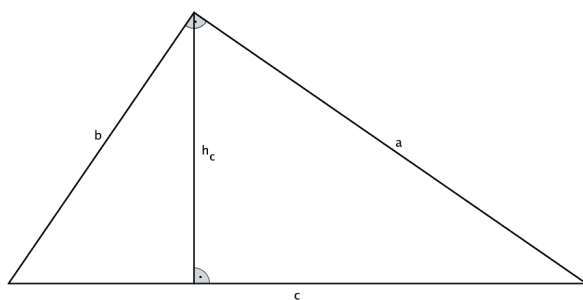
$$\beta_2 = \frac{a}{\alpha_2} = \frac{a}{\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}} = \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} = \mathcal{H}(\alpha_1, \beta_1)$$

So ist also die Näherung α_2 das arithmetische Mittel der beiden Näherungen α_1 und β_1 und β_2 ist das harmonische Mittel von α_1 und β_1 .

Anders ausgedrückt: Aus einer vorgegebenen Einschachtelung $\beta_1 \leq \sqrt{a} \leq \alpha_1$ bekommt man mit $\mathcal{H}(\alpha_1, \beta_1) \leq \sqrt{a} \leq \mathcal{A}(\alpha_1, \beta_1)$ eine bessere Einschachtelung. Wiederholen des Prozesses liefert eine Intervallschachtelung für \sqrt{a} , die sehr schnell konvergiert. (siehe z.B. [3])

4.4 Die Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck

Behauptung: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe auf der Hypotenuse gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Kathetenquadrate.



$$h_c^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \mathcal{H}(a^2, b^2)$$

Beweis: Die Fläche F des rechtwinkigen Dreiecks lässt sich auf zwei verschiedene Arten berechnen:

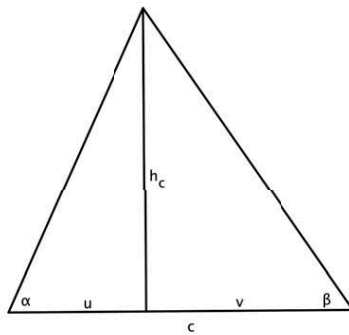
$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}a \cdot b \\
 c \cdot h_c &= a \cdot b \\
 c^2 \cdot h_c^2 &= a^2 \cdot b^2 \\
 h_c^2 &= \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2} = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(a^2, b^2) \quad \square
 \end{aligned}$$

4.5 Die Höhe in einem Dreieck

Behauptung: In einem beliebigen Dreieck ist das Verhältnis einer Höhe h zur Seite, auf der h senkrecht steht, gleich der Hälfte des harmonischen Mittels der Tangenswerte der an die Seite angrenzenden Winkel.

$$\frac{h_c}{c} = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(\tan \alpha, \tan \beta)$$

Beweis:



Es gilt: $\frac{h_c}{u} = \tan \alpha$ und $\frac{h_c}{v} = \tan \beta$, also

$$c = u + v = \frac{h_c}{\tan \alpha} + \frac{h_c}{\tan \beta} = h_c \cdot \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \text{ und daraus}$$

$$\frac{h_c}{c} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta}} = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(\tan \alpha, \tan \beta) \quad \square$$

4.6 Die Funktion $f(x) = \frac{c}{x}$

Behauptungen: Die Funktion $f(x) = \frac{c}{x}$ ordnet dem arithmetischen Mittel von Argumenten das harmonische Mittel der entsprechenden Funktionswerte zu und dem harmonischen Mittel von Argumenten das arithmetische Mittel der entsprechenden Funktionswerte.

Beweis:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &= \frac{c}{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} = \frac{nc}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{n}{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{c}} \\ &= \frac{n}{\frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \dots + \frac{x_n}{c}} = \frac{n}{\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)}} \\ &= \mathcal{H}(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \end{aligned}$$

Analog rechnet man $f\left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}\right) = \mathcal{A}(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ nach.

4.7 Die mittlere Krümmung einer regulären Fläche im Raum

Zum Abschluss noch ein Beispiel aus der höheren Mathematik: Sind k_1 und k_2 die Hauptkrümmungen in einem Punkt P einer regulären Fläche F in \mathbf{R}^3 , so wird $h = \frac{k_1 + k_2}{2}$ als mittlere Krümmung bezeichnet.

Sind nun r_1 und r_2 die Radien, die den Hauptkrümmungen entsprechen (also $r_1 = \frac{1}{k_1}$ resp. $r_2 = \frac{1}{k_2}$), so wird $h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \implies \frac{1}{h} = \mathcal{H}(r_1, r_2)$

5 Fazit

Das harmonische Mittel braucht sich wahrlich nicht hinter dem arithmetischen oder dem geometrischen Mittel zu verstecken! Durch den wohlbekannten Zusammenhang zwischen Mittelwerten und Zahlenfolgen lohnt sich auch eine nähere Betrachtung von harmonischen Zahlenfolgen (siehe [5]).

Literatur

- [1] Hirscher, Horst, *Viertausend Jahre Mittelwertbildung*, Uni Saarbrücken, 2003
- [2] Hirscher, Horst, *Mittenbildung als fundamentale Idee*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 4-13
- [3] Hirscher, Horst, *Mittelwertfolgen - oder: Mitten inmitten von Mitten*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 42-54
- [4] Hirscher-Buhrmester, M., *Mittelwerte und Mitten in der Musik*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 14-17
- [5] Jaggi, Beat, *Mittelwerte und Zahlenfolgen*, erscheint 2012
- [6] Lambert, A. und Peters, U., *Mittelwerte und Mitten in Geometrie und Physik*, Der Mathematikunterricht 5/2004, Seiten 30-41
- [7] Winter, H., *Mittelwerte - eine grundlegende mathematische Idee*, aus dem Themenheft Mittelwerte in mathematik lehren, 1985, Heft 8
- [8] Winter, H. (Hrsg.), *Themenheft Mittelwerte*, aus mathematik lehren, 1985, Heft 8

Markow-Ketten

Hans Ulrich Keller, MNG Zürich

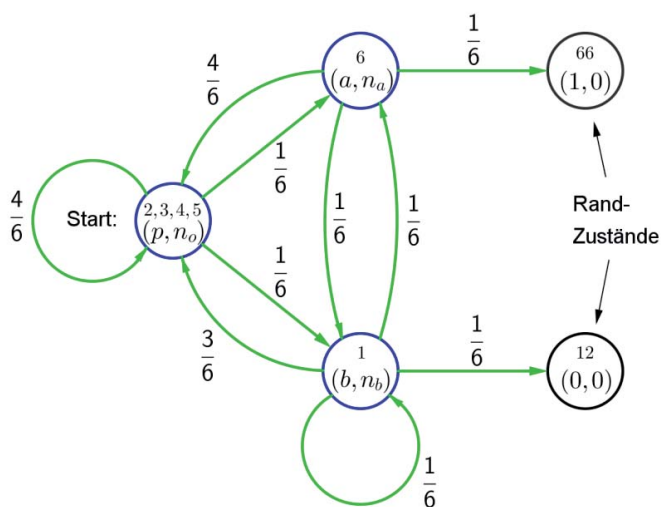
Werden Zufallsversuche mit unendlich vielen Ausfällen betrachtet, reicht die statische Untersuchung mit Bäumen und Pfadregeln meist nicht mehr aus. Stattdessen können dynamische Zufallsprozesse untersucht werden, in welchen Zustände und ihre Wahrscheinlichkeiten sowie Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen diesen Zuständen eine wichtige Rolle spielen: Die Markow-Ketten.

Die ausführliche Darstellung der Theorie dazu kann hier nicht das Thema sein: Diese findet sich z. B. im genialen Buch von Arthur Engel: "Wahrscheinlichkeit und Statistik", Band 2, ISBN 3-12-983170-3, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Hier sollen – ohne Beweise – die beiden Mittelwertsregeln kurz erklärt und an einem einfachen Beispiel angewendet werden. Dieses Beispiel kann dann für eine Vielzahl von anderen Situationen angepasst werden.

Die Aufgabe

Bei einem Spiel soll so lange mit einem Würfel gewürfelt werden, bis zum ersten Mal unmittelbar nacheinander entweder zwei Sechser oder zuerst eine Eins und unmittelbar danach eine Zwei gewürfelt wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Ereignisse, und wie oft muss im Mittel gewürfelt werden, bis eines dieser Ereignisse eingetreten ist? Diese Zahlen sollen kurz abgeschätzt werden, bevor die Lösung angeschaut wird!



In der nebenstehenden Figur bezeichnen die drei linksseitigen Kreise innere, die beiden Kreise auf der rechten Seite Rand-Zustände (oder "absorbierende Zustände").

Die Zahlen bei den Pfeilen geben die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen an.

Die erste Zahl in den Klammern gibt jeweils die Wahrscheinlichkeit an, dass – ausgehend von

diesem Zustand – der Zustand "66" erreicht wird. Die zweite Zahl gibt den Erwartungswert der Anzahl Versuche an, die – ausgehend von diesem Zustand – nötig sind, bis ein Randzustand erreicht ist.

1. Mittelwertsregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines inneren Zustandes ist gleich dem gewichteten Mittel der Wahrscheinlichkeiten seiner Nachfolger.

Wenden wir die 1. Mittelwertsregel auf den Startzustand, den Zustand "6" und den Zustand "1" an, ergibt sich folgendes System:

$$\begin{cases} p = \frac{4}{6}p + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}a \\ a = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6}b + \frac{4}{6}p \\ b = \frac{1}{6}b + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{3}{6}p \end{cases}$$

Dieses System hat die Lösung $p = \frac{6}{13}$, $a = \frac{7}{13}$, $b = \frac{5}{13}$. Die Wahrscheinlichkeit, ab dem Start den Zustand "66" zu erreichen, ist also $\frac{6}{13}$, die Gegenwahrscheinlichkeit für das Erreichen des Zustandes "12" folglich mit $\frac{7}{13}$ etwas grösser! Dies erscheint zwar paradox, lässt sich aber mit folgender Überlegung plausibel machen: Ist der Zustand "6" erreicht, besteht eine grössere Wahrscheinlichkeit als beim Erreichen des Zustandes "1", wieder auf den Start zurück geworfen zu werden.

2. Mittelwertsregel:

Der Erwartungswert der Anzahl Versuche bis zum Erreichen des Randes ist bei einem inneren Zustand gleich dem um 1 vergrösserten gewichteten Mittel der Erwartungswerte seiner Nachfolger. Bei Randzuständen ist dieser Erwartungswert natürlich 0.

Wenden wir die 2. Mittelwertsregel wiederum auf die gleichen drei Zustände an, ergibt sich das System

$$\begin{cases} n_o = 1 + \frac{4}{6}n_o + \frac{1}{6}n_a + \frac{1}{6}n_b \\ n_a = 1 + \frac{1}{6}n_b + \frac{4}{6}n_o + \frac{1}{6} \cdot 0 \\ n_b = 1 + \frac{1}{6}n_b + \frac{1}{6}n_a + \frac{3}{6}n_o + \frac{1}{6} \cdot 0 \end{cases}$$

Dieses System hat die Lösung $n_o = \frac{252}{13} \approx 19.38$; $n_a = \frac{216}{13} \approx 16.62$; $n_b = \frac{210}{13} \approx 16.15$.

Das bedeutet, dass in diesem Spiel im Mittel etwa 19.38 Mal gewürfelt werden muss, bis ein Randzustand erreicht wird. Ist weiter z. B. der Zustand "1" erreicht, muss – ausgehend von diesem Zustand – im Mittel noch weitere 16.15 Mal gewürfelt werden, bis ein Randzustand erreicht wird. Eine Simulation von 130'000 solcher Spiele mit *Mathematica*, unter Verwendung von gleichverteilten ganzen Pseudozufallszahlen von 1 bis 6, ergab beispielsweise beim ersten Durchlauf 70018 Mal den Endzustand "12" und 59982 Mal den Endzustand "66", bei einer mittleren Spieldauer von 19.3015 Würfeln: Alle diese Zahlen stehen in bester Übereinstimmung mit den oben angegebenen korrekten Werten.

Dreiecke mit gleichem Umfang und gleichem Flächeninhalt

Peter Gallin, Universität Zürich

Es gibt Leute, die glauben, dass durch die Angabe des Umfangs u und des Flächeninhalts f eines Dreiecks dieses vollständig bestimmt sei. Um diese Vermutung als Irrmeinung zu entlarven, wollen wir zeigen, dass es für gegebene Parameter u und f eine ganze Schar von nicht-kongruenten Dreiecken gibt. Konkret stellen wir uns folgende Aufgabe: Betrachte ein positiv orientiertes Dreieck ABC mit der variablen Grundseite $c = AB$, die wir auf die horizontale x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems legen. Der Eckpunkt A soll im Ursprung liegen und B auf der positiven x -Achse hin und her wandern (Abbildung 1). Jetzt stellt sich die Frage, auf welcher Kurve sich der Eckpunkt C bewegt, wenn verlangt wird, dass der Umfang u und der Flächeninhalt f konstant bleiben. Damit wird c zum Parameter der gesuchten Ortskurve von C .

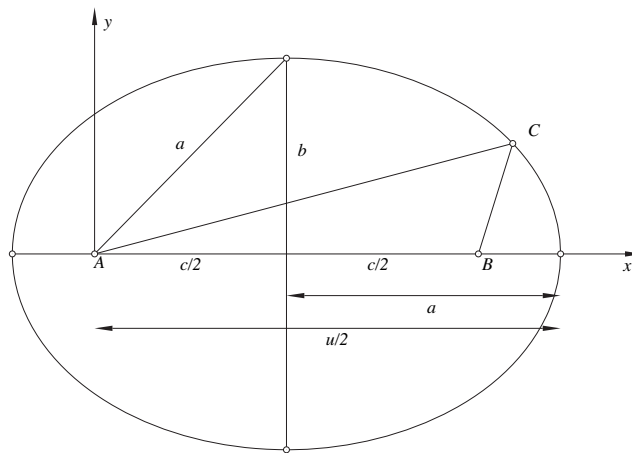


Abbildung 1: Dreieck ABC mit fester Grundseite und festem Umfang

Lassen wir vorerst c konstant und bestimmen die Ortskurve von C , wobei wir nur den konstanten Umfang u des Dreiecks ABC , nicht aber die Flächenbedingung — die Konstanz von f — berücksichtigen. Damit wandert C auf der Gärtnerellipse mit den Brennpunkten A und B . Der auf der positiven x -Achse liegende Scheitelpunkt dieser Ellipse hat die Entfernung $\frac{u}{2}$ von A . Wir bestimmen nun die Mittelpunktsgleichung der Ellipse mit den Halbachsenlängen a und b , die wir durch u und c ausdrücken: Aus Abbildung 1 lesen wir ab, dass $a = \frac{u}{2} - \frac{c}{2}$. Daraus ergibt sich mit Pythagoras $b^2 = a^2 - (\frac{c}{2})^2 = (\frac{u}{2} - \frac{c}{2})^2 - (\frac{c}{2})^2 = (\frac{u}{2})^2 - (\frac{u}{2})c = (\frac{u}{2})(\frac{u}{2} - c)$. Somit lautet die Ellipsengleichung

$$\frac{(x - \frac{c}{2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x - \frac{c}{2})^2}{(\frac{u}{2} - \frac{c}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{u}{2})(\frac{u}{2} - c)} = \frac{(2x - c)^2}{(u - c)^2} + \frac{4y^2}{u(u - 2c)} = 1 .$$

Auf dieser Ellipse läuft C , solange bei gegebenem u die Seitenlänge c festgehalten wird. Nun verlangen wir zusätzlich, dass der Flächeninhalt f konstant bleiben soll, womit wir $\frac{yc}{2} = f$ oder $y = \frac{2f}{c}$ beachten müssen. Setzen wir diese Bedingung in der Ellipsengleichung ein und lösen diese nach x auf, so erhalten wir die x -Koordinaten der beiden Schnittpunkte der horizontalen Geraden $y = \frac{2f}{c}$ mit der Ellipse. Lassen wir jetzt aber c frei, so ergibt sich die Parameterdarstellung der gesuchten Ortskurve für C bei variablem c ($0 < c < \frac{u}{2}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x(c) = \frac{c}{2} \pm \frac{u - c}{2} \sqrt{1 - \frac{16f^2}{c^2 u (u - 2c)}} \\ y(c) = \frac{2f}{c} \end{array} \right\}$$

Abbildung 2 zeigt ein konkretes Beispiel für $u = 40$ und $f = 40$. Damit obige Parameterdarstellung der Ortskurve reelle Punkte liefert, muss die darin enthaltene Diskriminante mit $u > 2c$ positiv sein: $c^2u(u - 2c) - 16f^2 > 0$. Diese Ungleichung dritten Grades liefert für $u = 40$ und $f = 40$ näherungsweise den im Positiven liegenden Bereich $4.551221 < c < 19.125135$. In Abbildung 2 variiert deshalb die Variable c — die Grundseitenlänge c des Dreiecks ABC — über die ganzen Zahlen von 5 bis 19. Für $c = 19$ ergibt sich einerseits die innerste Ellipse bei konstantem Umfang $u = 40$ und die unterste Parallele zur x -Achse bei konstantem Flächeninhalt $f = 40$. In den Schnittpunkten sind beide Bedingungen erfüllt. Die zweitinnerste Ellipse resp. die zweitunterste Parallele entsprechen $c = 18$, usw. bis für $c = 5$ zum letzten Mal die oberste Parallele die zugehörige äusserste Ellipse überhaupt schneidet.

Die Ortskurve ist die Menge aller Schnittpunkte von Ellipse zum Parameter c und zugehöriger x -Achsen-Parallele zum Parameter c . Sie zeigt alle möglichen Lagen des Punktes C an, während A im Ursprung fest bleibt und c (die Lage von B) von etwa 4.551221 bis etwa 19.125135 variiert. Alle diese Dreiecke ABC haben $u = 40$ und $f = 40$. Man kann $c = \frac{80}{y}$ aus der Parameterdarstellung eliminieren und erhält eine explizite Darstellung der Ortskurve für C , welche beispielsweise so lautet:

$$x(y) = \frac{40}{y} \pm (y - 2) \sqrt{\frac{400}{y^2} - \frac{y}{y - 4}}$$

Die Graphen der beiden Äste schliessen lückenlos und glatt aneinander an, sobald obige Diskriminante Null wird, d. h. für $y_1 = 4.18297 \dots$ oder für $y_2 = 17.5777 \dots$. So entsteht eine geschlossene ovale Kurve.

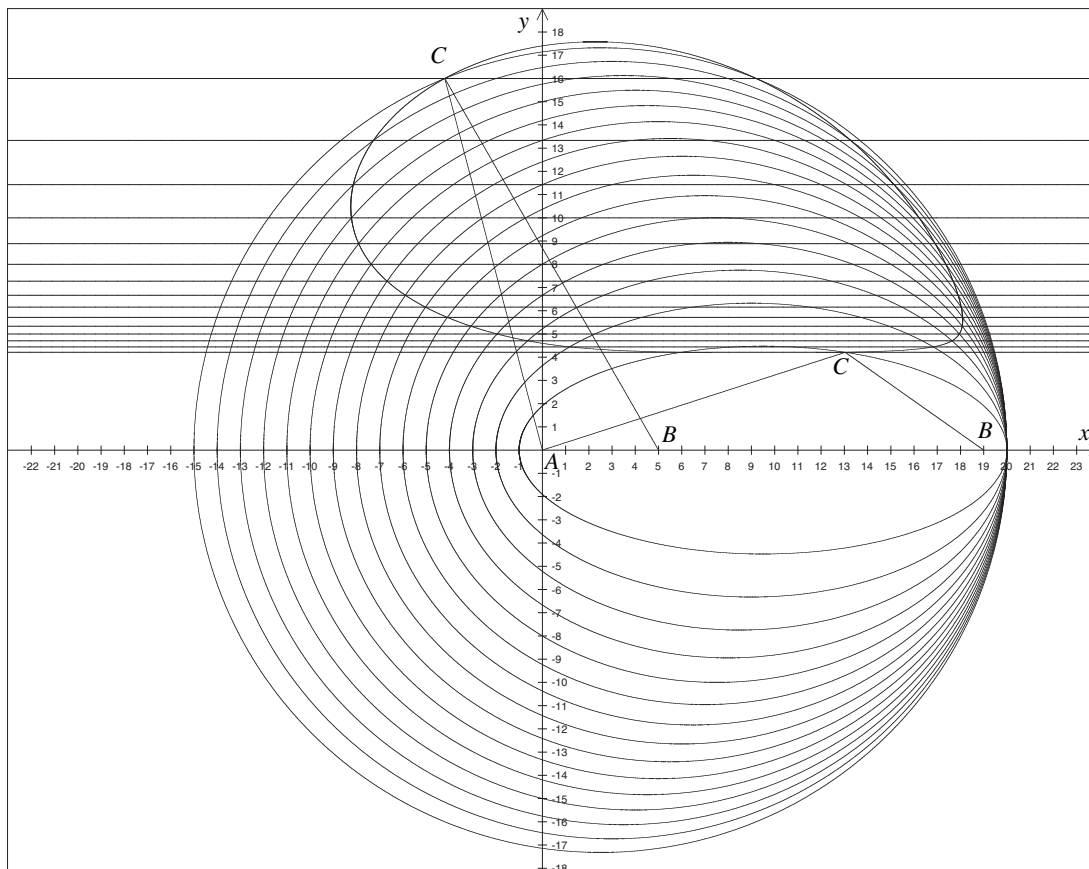


Abbildung 2: Viele Dreiecke mit festem Umfang 40 und festem Flächeninhalt 40

Mathematikunterricht in der Fachmittelschule mit Lernumgebungen

Torsten Linnemann

Pädagogische Hochschule FHNW und
Gymnasium Oberwil

Einleitung

Beim Aufbau der Fachmittelschule wurden keine Kapazitäten bereitgestellt, um die Didaktik auf die besonderen Bedürfnisse der FMS abzustimmen. Gespräche mit Lehrpersonen zeigen schnell, dass viel Arbeit in die Planung des Unterrichts, die Anpassung von Materialien an die Fachmittelschule und in die besonderen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler der Fachmittelschule investiert wird, diese Arbeit aber nicht koordiniert ist.

Auf den folgenden Seiten wird ein Konzept für einen Unterricht in der Fachmittelschule vorgestellt, mit dem ein hohes Engagement der Schülerinnen und Schüler erreicht werden soll. Ziel ist es, die Lernenden kognitiv zu aktivieren, sich also aktiv mit den Lerninhalten auseinanderzusetzen. Das Konzept stützt sich stark auf sogenannte Lernumgebungen ab und wird anhand konkreter, bereits unterrichtserprobter Beispiele vorgestellt. Es ist Teil des Projektes KAMM, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht an der Mittelschule.

Ich möchte in diesem Zusammenhang auf eine Weiterbildung hinweisen, die ich mit der Weiterbildungszentrale WBZ am 14.3.2013 durchführe:

<https://www.wbz-cps.ch/de/kognitiv-aktivierender-mathematikunterricht-der-fachmittelschule>

1 Die Situation in der Fachmittelschule

Oftmals wird gesagt, die Fachmittelschule sei die Nachfolgerin der Diplommittelschule. Das stimmt aber nur bedingt: Absolventinnen und Absolventen der Fachmittelschule sollen Zugang zu den gleichzeitig mit der Fachmittelschule entstandenen Fachhochschulen haben. Eine der bedeutendsten Unterschiede zur Diplommittelschule ist, dass die Fachmittelschule in vielen Kantonen zu einem Hauptzubringer für die pädagogische Hochschule geworden ist: Primarlehrpersonen, Kindergärtnerinnen und Kindergärnter besuchen vor ihrem Studium die Fachmittelschule. Die mathematischen Einstellungen der Fachmittelschülerinnen und Fachmittelschüler haben dann wohl recht direkte Effekte auf die mathematischen Erlebnisse der Primarschülerinnen und Primarschüler.

Die Schülerinnen und Schüler einer 1., 2. und 3. Klasse der FMS des Gymnasiums Oberwil haben im Rahmen einer Erhebung unter anderem die folgende Frage beantwortet:

«Meine Motivation im Mathematikunterricht ist 1= klein, 2= eher klein, 3= eher gross, 4= gross»

Schwerpunkt	Anzahl	Mittelwert
Gesundheit	15	2.73
Pädagogik	17	2.24
Kunst	9	2.44
Soziales	14	1.86

Die Motivation in Mathematik liegt im Schwerpunkt G hoch signifikant höher als in S. Auffallend ist der niedrige Wert beim Schwerpunkt P, den viele angehende Primarlehrpersonen besuchen – die dann Mathematik unterrichten müssen.

Es besteht Handlungsbedarf und es lohnt sich, in der Fachmittelschule einen Mathematikunterricht zu geben, der auf die Klientel gut abgestimmt ist. Im Rahmenlehrplan der FMS wird das so formuliert:

«Die Fachmittelschule ist eine allgemein bildende Schule, vermittelt ein berufsfeldbezogenes Angebot und betont intensiv die Persönlichkeitsbildung.»(EDK, 2004)

Im Mathematikteil des Rahmenlehrplans wird daher neben innermathematischen Fähigkeiten auch der Transfer in die Praxis und die Förderung der Problemlösefähigkeit gefordert. Hingegen wird nicht verlangt, dass die Schülerinnen und Schüler aufwändige Techniken automatisiert beherrschen. Verlangt ist ein eher exemplarisches Vorgehen. Zu diesem exemplarisch vertiefenden Vorgehen passt das Konzept von Lernumgebungen, das im Folgenden vorgestellt wird.

2 Lernumgebungen – Treppenzahlen und Hundertertafel

Bei einer «substanziellen Lernumgebung» handelt es sich um eine reichhaltige und vielfältige Aufgabenstellung, die verschiedenen Kriterien genügen soll. Nach Wittmann (1998) handelt es sich dabei um Aufgaben-/Problemstellungen, die zentrale Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts präzisieren, die flexibel an die Gegebenheiten einer Klasse anzupassen sind und reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten bieten.

Eine grosse Stärke dieser Lernumgebungen ist die natürliche Differenzierung. Lernumgebungen sollten einen Einstieg für alle Lernenden bieten – und dann Bearbeitungsmöglichkeiten für alle, auch für Hochbegabte, liefern.

2.1 Treppenzahlen

<p>Manche Zahlen lassen sich als Summe von aufeinander folgenden Zahlen schreiben. Beispiele:</p> <p>$9 = 2 + 3 + 4$ Treppe mit drei Stufen</p> <p>$9 = 4 + 5$ Treppe mit zwei Stufen</p> <p>$8 = ?$</p> <p>Was können Sie alles über Treppenzahlen herausfinden?</p>	
--	--

Und das ist auch schon die gesamte Lernumgebung. Die Lernumgebung ist maximal offen formuliert. Es geht vor allem darum, die Schülerinnen und Schüler zu eigenem Experimentieren anzuregen. Das

heisst hier, dass sie selbstständig Beispiele bilden müssen, diese Beispielsuche systematisieren müssen und daraus Hypothesen ableiten sollten. Und daraus ergeben sich Ansätze für weitere Beispiele.

Eine gute Idee ist natürlich, systematisch Beispiele zu betrachten, so wie das rechts geschieht. und daraus Hypothesen zu generieren. Diese sind selbstverständlich nicht immer richtig, bilden aber meistens Anlässe für weitere Überlegungen:

■ Ungerade 2, die nicht durch 3 → eine Möglichkeit
 ■ Ungerade Zahlen, die durch 3 teilbar sind → mehrere
 Zer-Potenzen → keine Lösung

Lernumgebung

1	=	/
2	=	/
3	=	1+2
4	=	/
5	=	2+3
6	=	1+2+3
7	=	3+4
8	=	/
9	=	1+2+3+4+5
10	=	1+2+3+4
11	=	5+6
12	=	3+4+5
13	=	6+7
14	=	2+3+4+5
15	=	7+8 1+2+3+4+5 4+5+6
16	=	/
17	=	8+9
18	=	5+6+7 3+4+5+6
19	=	9+10
20	=	2+3+4+5+6
21	=	1+2+3+4+5+6 10+11 6+7+8

Leuders, Naccarella, Philipp (2011) verwenden diese Lernumgebung für Studien mit Primarlehrstuderenden. Sie beschreiben innermathematisches Experimentieren als Suche in drei Räumen: dem Beispielraum, dem Strategieraum und dem Hypothesenraum.

Der Autor (Linnemann, 2012) setzt die Lernumgebung bei Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule ein. Neben der Bestätigung der Ergebnisse von Leuders et al (2011) geht es um Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren. Wie bei Haverty et al. (2000) erweist sich der Wechsel zwischen den drei Räumen als entscheidender Faktor. Gute Erfolgsstrategien sind:

- Anlegen einer breiten Datenbasis
- Beispiele strukturieren, diese intensiv untersuchen.
- Häufiger Wechsel zwischen den 3 Räumen
- Reflexivität, nicht zu lange bei einem unergiebigem Ansatz verweilen
- Ansatz tief untersuchen, Verallgemeinerung versuchen

Treppenzahlen sind tatsächlich sehr breit einsetzbar, auf jeder Altersstufe werden andere Aspekte wichtig. In der FMS passt sie aber nur mit Mühe in den Lehrplan, vielleicht am ehesten in den fakultativen Bereich der Folgen. Die Lernumgebungen, die momentan vom Autor entwickelt werden, sollen diesen Nachteil dann nicht mehr haben.

2.2 Die Hundertertafel

Diese Lernumgebung ist inspiriert von einer Lernumgebung im Zahlenbuch 6 (Affolter et al, 2001, S. 94). Dort wird die aus den ersten Klassen bekannte Hundertertafel erneut aufgenommen.

- a) Wählen Sie ein Quadrat mit vier Zahlen in der Hundertertafel. Bilden Sie die Summe der Diagonaleinträge (im Beispiel im Bild wäre das $16 + 27$ und $17 + 26$). Führen Sie das für mehrere Beispiele durch. Was stellen Sie fest? Können Sie das begründen?
- b) Bilden Sie nun die Produkte der Diagonaleinträge (im Beispiel also $16 \cdot 27$ und $17 \cdot 26$). Führen Sie auch hier mehrere Beispiele aus. Was stellen Sie fest? Begründung?
- c) Bilden Sie in verschiedenen Quadraten mit 9 Zahlen die Summe der äusseren 8 Zahlen (im Beispiel 336) und vergleichen Sie mit der mittleren Zahl? Was stellen Sie fest? Können Sie das begründen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Beim Nachdenken über diese Lernumgebung zeigt sich, dass sich zum Beispiel die 16 mit x , ferner $17 = x + 1$, $26 = x + 10$ und $27 = x + 11$ setzen lassen und mit dieser Algebraisierung Einsichten in die Zusammenhänge finden lassen.

Bei der Behandlung in den Klassen des Autors kam aber keine Schülerin / kein Schüler auf die Idee, einen solchen Lösungsweg zu verfolgen. Der Weg von der Arithmetik zur Algebra war überhaupt nicht gangbar, leider. Hier musste viel Zeit investiert werden.

Als fruchtbar hat sich erwiesen, vorab das Begründen, eine zentrale mathematische Kompetenz, in den Fokus zu rücken. Hier eine beispielhafte Bearbeitung des Aufgabenteils b durch einen Schüler:

«Auf einer Diagonalen gibt es 10 mehr als auf der anderen. Dies ist so, weil man die beiden hinteren Zahlen immer gleich mit sich selber multipliziert.

$$16 \cdot 27 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 7 + 6 \cdot 20 + 6 \cdot 7$$

$$17 \cdot 26 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 6 + 7 \cdot 20 + 6 \cdot 7$$

Der einzige Unterschied ist man rechnet einmal die kleinere Zahl der ersten Stelle mit der grösseren Zahl der zweiten Stelle und umgekehrt.

Bsp 2

$$13 \cdot 24 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 4 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 4$$

$$14 \cdot 23 = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 4$$

Dieser Schüler hat das Zehnersystem genutzt, die Rechnung mit dem Distributivgesetz zerlegt und dann den Unterschied benannt. Nach etwas eigenem Nachdenken wird damit klar, warum ein Unterschied von 10 bestehen muss.

Diese und weitere Bearbeitungen wurden genutzt, um über das Begründen in Mathematik zu reflektieren. Eine Zusammenfassung der Antworten:

- Für mich ist eine Begründung gut, wenn man viele Beispiele macht und dann in eigenen Worten die Beispiele erklärt. Eine Begründung muss auf den Punkt sein und nicht langes «Herumgefasel». Sie muss in einem verständlichen und gutem Deutsch geschrieben sein (einfach).
- Sie muss klar und übersichtlich dargestellt sein.
- Eine gute Begründung ist kurz und bündig. Lieber ein allgemeines Beispiel als irgendwelche Zahlen.
- Jeder Schritt wurde erklärt und Zahlen stellen Denkhilfen dar.
- Die Erklärung ist verständlich aufgeschrieben. Zudem ist sie nicht sehr lang. Eine gute Erklärung kann ohne Zahlen auskommen, diese jedoch als Hilfestellung verwenden.

Diese Sammlung von Antworten dient nun in der Klasse als Referenz, wenn etwas (auch von der Lehrperson) begründet werden soll.

Augenöffnend war für den Autoren eine Bearbeitung der Lernumgebung durch eine Gymnasiastin, die die folgende Bearbeitung abgegeben hat:

$$\begin{array}{ll} 16 \cdot 27 = 432 & x \cdot (x + 11) = x^2 + 11x \\ 17 \cdot 26 = 442 & (x + 1) \cdot (x + 10) = x^2 + x + 10x + 10 = x^2 + 11x + 10 \end{array}$$

Dazu kam der Kommentar: «Reicht der Beweis oder muss ich es auch begründen?»

In der Tat, ein Beweis liefert nicht unbedingt eine Begründung, warum etwas so ist. Die arithmetische Schülerlösung mit Hilfe von Beispielen weiter oben hat auch Vorteile.

3 Das Projekt KAMM

Unter dem Begriff KAMM (kognitiv aktivierender Mathematikunterricht in der Mittelschule) werden mehrere eigenständige Projekte zusammengefasst, die aber soweit verzahnt sind, dass daraus ein mathematikdidaktisches Konzept für die Fachmittelschule (FMS) entsteht, das sowohl dem Rahmenlehrplan der FMS als auch aktuellen fachdidaktischen Forschungsergebnissen entspricht. Ein Fokus liegt dabei auf der Entwicklung und Evaluation ausgewählter Materialien, unter anderem von geeigneten Lernumgebungen.

Zusätzlich zu den oben angeführten Kriterien sollen die Lernumgebungen weitere Eigenschaften haben:

- Über eine niedrige Einstiegsschwelle erlauben es die Materialien allen Schülerinnen und Schülern, ihre Problemlösefähigkeiten zu entwickeln.
- Sie sind curricular eingebunden, stellen also keine Inseln im Unterrichtsablauf dar.
- Sie lassen sich in Bewertungssituationen einbinden.
- Sie sind in eine intensive Lernwegbegleitung für die Lernumgebungen eingebettet.

In der Grobstruktur zum Lehrplan 21, Fachbereich Mathematik, werden drei Kompetenzaspekte formuliert. Einer davon wird folgendermassen beschrieben:

«Die Schülerinnen und Schüler lernen *erforschen und argumentieren*: Sie können sich auf unbekannte Zahlenräume und Muster einlassen, Beispiele zu Gesetzmässigkeiten suchen und Zahlen systematisch variieren. Die erlangten Ergebnisse können sie beschreiben, überprüfen, hinterfragen, interpretieren und begründen.» (EDK, 2011)

In der Tat, die beiden vorgestellten Lernumgebungen lassen sich in diesen Aspekt einordnen: die Treppenzahlen mehr beim Erforschen, die Hundertertafel mehr beim Argumentieren. Die Hundertertafel fördert darüber hinaus auch das *Mathematisieren*.

Mit dem Lehrplan 21 wird weiter gefordert, den Mathematikunterricht an Kompetenzen zu orientieren. Diese werden wie oben angedeutet beschrieben. Es ist folgerichtig, diese Kompetenzen auch in Prüfungssituationen zu fordern. Beim Einsatz von Lernumgebungen besteht andernfalls auch die Gefahr, dass die Lernumgebungen als nette Abwechslung gesehen werden, die aber nicht für die Bewertung relevant sind. Das kann das Engagement negativ beeinflussen.

Es ist nicht möglich, Lernumgebungen im Rahmen der üblichen, auch Rechenfertigkeit abfragenden Tests einfließen zu lassen. Zentral bei Lernumgebungen ist, dass genügend Zeit vorhanden sein muss. Aufgaben mit und ohne Zeitdruck sollten nicht gemischt werden.

Bei den Lernumgebungen des Projekts KAMM werden, wie bei Jundt und Wälti (2011), Beurteilungskriterien mit beschrieben. Das Raster wird nicht eng vorgegeben. Es sollte stattdessen unmittelbar an die Situation im Unterricht geknüpft werden.

4 Literatur

1. Affolter, W., Amstad, H., Doebeli, M. und Wieland, G. (2001): Das Zahlenbuch 6. Zug: Klett und Balmer.
2. EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2004): Rahmenlehrplan für Fachmittelschulen. <http://edudoc.ch/record/2033/files/5-1d.pdf>
3. EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2011): Grobstruktur Lehrplan 21. http://lehrplan.ch/sites/default/files/grobstruktur_lp21.pdf
4. Haverty, A., Koedinger, R.K., Klahr, D. & Alibalt, M. (2000): Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. In: Cognitive Science, Vol 24, S. 249-298.
5. Jundt, W. und Wälti, B. (2011): Mathematische Beurteilungsumgebungen; 7. Schuljahr. Zug: Klett und Schulverlag.
6. Leuders, T., Naccarella, D. & Philipp, K. (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2), 205-231
7. Linnemann, T. (2012): Innermathematisches Experimentieren in Lernumgebungen in der Sekundarstufe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: Waxmann, online unter <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/>
8. Wittmann, E. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zur Lehrerbildung 16(3), S. 329-342)

Und, ganz am Schluss, noch einmal der Hinweis auf die Weiterbildung:

<https://www.wbz-cps.ch/de/kognitiv-aktivierender-mathematikunterricht-der-fachmittelschule>

Betrachtungen zur Kommutativität beim Potenzieren

Rainer Hauser, SIS College Zürich
(rainer.hauser@swissinternationalschool.ch)

Zusammenfassung

Dass die Addition als repetitive Ausführung der Nachfolgerfunktion und die Multiplikation als repetitive Ausführung von Additionen das Kommutativgesetz erfüllen, lernt ein Kind bereits in der Primarschule. Das Potenzieren hingegen als repetitive Ausführung von Multiplikationen ist nicht kommutativ, denn für zwei verschiedene Zahlen a und b ist a hoch b meistens nicht gleich b hoch a . Es gibt aber Zahlenpaare, sogar unendlich viele, für die das Potenzieren kommutativ ist. Diesen Zahlenpaaren und der Frage, wie man sie findet, wird im Folgenden nachgegangen.

1 Operationen der ersten und zweiten Stufe

Die Nachfolgerfunktion, die einer natürlichen Zahl n die Zahl $n + 1$ zuordnet, ist wohl die urchälteste Form von Arithmetik in der Geschichte der Menschheit. Statt aber drei Kieselsteine in Einzelaktionen nacheinander auf einen Haufen von fünf Kieselsteinen zu legen, kann man gleich alle drei Kieselsteine zu den fünf anderen hinzufügen, womit die Addition erfunden ist. Dass es gleichgültig ist, ob man fünf Kieselsteine auf einen Haufen von drei Kieselsteinen wirft oder drei Kieselsteine auf einen Haufen von fünf, überrascht keineswegs, denn am Schluss liegen in beiden Fällen gleich viele Kieselsteine auf dem Haufen.

Man kann sich die Kommutativität der Addition als Grundoperation der ersten Stufe aber auch geometrisch veranschaulichen. Legt man die ursprünglichen drei Kieselsteine in einer Reihe hin und fügt man die zusätzlichen fünf Kieselsteine hinzu, indem man die Reihe auf der rechten Seite verlängert, so liegen links die drei Kieselsteine und rechts die fünf Kieselsteine. Sieht man sich die Situation von der gegenüberliegenden Seite an, so liegen jetzt die fünf zusätzlichen Kieselsteine links und die drei ursprünglichen Kieselsteine rechts.

Die Multiplikation als Grundoperation der zweiten Stufe ist als Vereinfachung der repetitiven Addition entstanden. Die Kommutativität ist in diesem Fall nicht mehr so offensichtlich, denn es ist nicht unmittelbar klar, weshalb ich zur gleichen Anzahl Kieselsteine komme, wenn ich $5 + 5 + 5$ Kieselsteine hinlege, wie wenn ich $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ Kieselsteine hinlege. Ordnet man die Kieselsteine aber geometrisch an, indem man immer drei Kieselsteine in einer Reihe und die nächste Reihe darüber hinlegt, so entsteht ein Rechteck. Dreht man es um neunzig Grad, so wird die Kommutativität sofort deutlich.

Geht man vom Zählen zum Messen und somit von den natürlichen zu den reellen Zahlen über, gilt sowohl für die Addition wie auch für die Multiplikation das Kommutativgesetz aus geometrischen Gründen immer noch. Setzt man zwei Längen zusammen, so bedeutet die Kommutativität einfach eine Drehung um hundertachtzig Grad, während sie bei der Flächenmessung im Rechteck die Drehung um neunzig Grad bedeutet.

2 Kommutativität auf der dritten Stufe

Auf der dritten Stufe ist Potenzieren repetitive Multiplikation mit demselben Faktor. Hier gilt die Kommutativität offensichtlich nicht, denn 2^3 als $2 \cdot 2 \cdot 2$ ist 8 und 3^2 als $3 \cdot 3$ ist 9. Es gibt jedoch mindestens ein Zahlenpaar a und b , für das $a^b = b^a$ gilt, denn 2^4 ist gleich 4^2 . Gibt es aber noch andere natürliche Zahlen a und b mit dieser Eigenschaft?

Für alle natürliche Zahlen m und n mit $m < n$ ausser den kleinsten ist m^n grösser als n^m , weil Exponentialfunktionen schneller wachsen als Potenzfunktionen. So gilt beispielsweise $10^5 = (2 \cdot 5)^5 = 2^5 \cdot 5^5$, während $5^{10} = 5^{5+5} = 5^5 \cdot 5^5$ ist. Es genügt also, sich für die Suche auf die kleinen natürlichen Zahlen zu beschränken. Man kann jetzt die Zahlenpaare mit Zahlen kleiner als 10 durchprobieren. Das werden wir aber nicht tun, denn später werden wir mit einfachen Überlegungen zeigen, dass die Zahlen 2 und 4 das einzige Paar von natürlichen Zahlen bilden, für welche das Potenzieren kommutativ ist.

3 Reelle Zahlen als Potenzen

Wenn man die Suche nach solchen Zahlenpaaren nicht auf die natürlichen Zahlen beschränkt, sondern beliebige reelle Zahlen zulässt, so kann man aus der Gleichung $a^b = b^a$ noch nicht gross Schlüsse ziehen. Ein paar Umformungen bringen die Gleichung $a^b = b^a$ jedoch in eine Form, die einfacher analysiert werden kann. Mit $a = e^{\ln a}$ sowie $a^b = (e^{\ln a})^b = e^{b \cdot \ln a}$ und analog $b^a = e^{a \cdot \ln b}$ folgt aus der strengen Monotonie der Exponentialfunktion e^x die Gleichung $b \cdot \ln a = a \cdot \ln b$, die sich in die Gleichung

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

umformen lässt. Gesucht sind also verschiedene Zahlen a und b , für welche die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

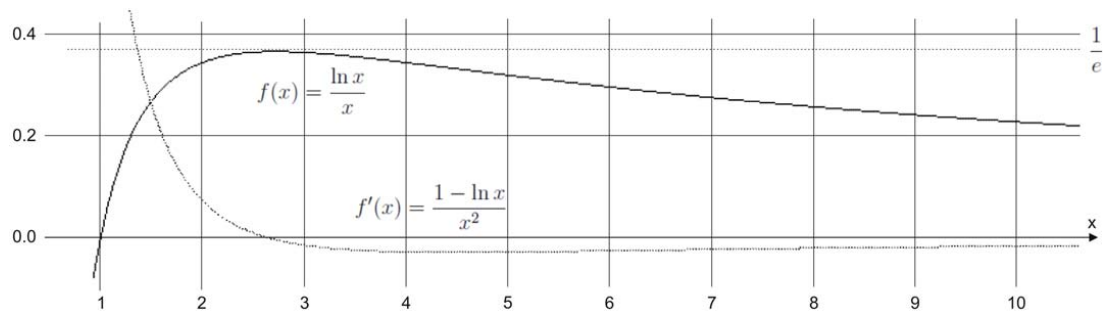
denselben Wert annimmt. Das gilt aber genau dann, wenn eine zur x -Achse parallele Gerade den Graphen von f in zwei oder mehr Punkten schneidet. Die Abbildung 1 zeigt neben dem Graphen von f auch den Graphen der Ableitung f' sowie die horizontale Gerade $y = \frac{1}{e}$, welche Tangente an den Graphen von f bei ihrem Maximum ist.

Das Maximum von $f(x)$ zwischen den x -Werten 2 und 3 lässt sich mit der Ableitung von f bestimmen. Die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

hat genau eine Nullstelle bei $x = e$. Das heisst aber, $f(x)$ steigt für x -Werte kleiner als e streng monoton an, nimmt bei $x = e$ den maximalen Wert $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ an, und ist von dort an streng monoton fallend. (Die Pole von $f(x)$ und $f'(x)$ kümmern uns nicht, weil wir uns nur für positive x -Werte interessieren.)

Weil sich $f(x)$ für grosse Werte x der x -Achse asymptotisch nähert, schneiden sämtliche Geraden $y = p$ für $0 < p < \frac{1}{e}$ den Graphen von f genau in zwei Punkten. Sind also die x -Koordinaten dieser Punkte a und b , so gilt $a^b = b^a$. Entweder a oder b muss somit kleiner als e

Abbildung 1: Graphen der Funktionen f und f'

sein. Damit kommen für natürliche Zahlen nur 1 und 2 in Frage. Weil $1^n = 1$ und $n^1 = n$ ist, fällt 1 aber weg, und weil es zu jeder Zahl a nur eine Zahl b gibt und wir für $a = 2$ schon $b = 4$ gefunden haben, kann es somit ausser den trivialen Fällen $a = b$ keine weiteren natürlichen Zahlen mehr geben, für die das Potenzieren kommutativ ist. Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen, dass es nur die zwei natürlichen Zahlen $a = 2$ und $b = 4$ gibt, welche die Gleichung $a^b = b^a$ erfüllen.

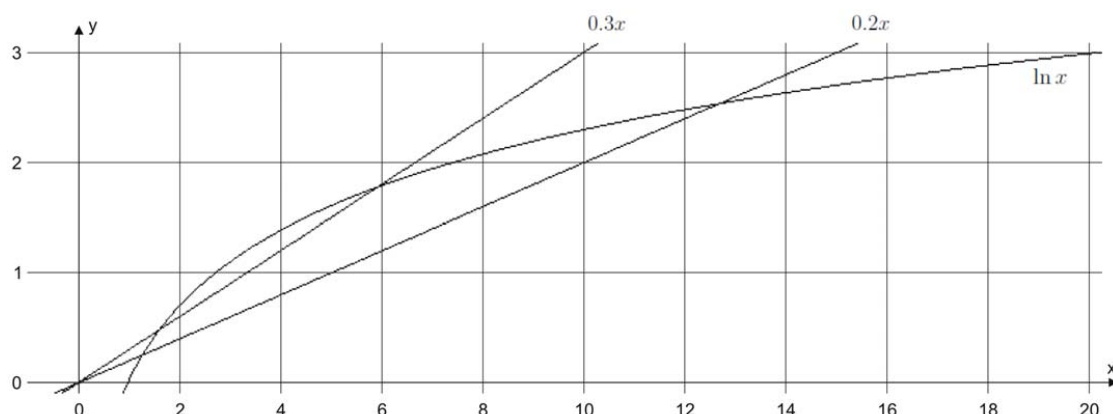
Reelle Zahlenpaare, welche die Gleichung $a^b = b^a$ erfüllen, gibt es aber unendlich viele. Zusammenfassend kann man sagen, dass es für jede Zahl a mit $1 < a < e$ genau eine Zahl b mit $e < b$ gibt, für die $a^b = b^a$ gilt, und dass es umgekehrt für jede Zahl b mit $e < b$ genau eine Zahl a mit $1 < a < e$ gibt, für die $a^b = b^a$ gilt. Die verbleibende Frage ist nur, wie man solche Zahlenpaare effektiv findet.

4 Konkrete Berechnungen

Obwohl man mit $f(x)$ und den Schnittpunkten mit horizontalen Geraden zu den gleichen Resultaten kommen kann, formulieren wir das gefundene Resultat leicht um und können so direkt mit der Logarithmusfunktion und mit einfachen linearen Funktionen arbeiten. Gleichbedeutend mit der obigen Aussage ist nämlich, dass die Gleichung $\ln x = p \cdot x$ für alle p mit $0 < p < \frac{1}{e}$ genau zwei Lösungen a und b hat, und diese Lösungen erfüllen $a^b = b^a$. Jede Gerade durch den Nullpunkt mit einer Steigung p , welche die Bedingung $0 < p < \frac{1}{e}$ erfüllt, schneidet den Graphen der Logarithmusfunktion in zwei Punkten. Die Abbildung 2 zeigt die je zwei Schnittpunkte des Graphen von $\ln x$ mit den Geraden $y = 0.3x$ beziehungsweise $y = 0.2x$ als Beispiele.

Um konkrete Zahlenpaare a und b zu finden, genügt ein graphikfähiger Taschenrechner, der die Schnittpunkte von zwei Funktionsgraphen bestimmen kann. So sind beispielsweise die x -Koordinaten der Schnittpunkte von $y = 0.3x$ mit $y = \ln x$ die genäherten Zahlen $a \approx 1.6313408$ und $b \approx 5.9377901$. Trotz Rundungseffekten stimmen a^b und b^a recht genau überein und haben den Werte 18.282929 beziehungsweise 18.282930.

Sind a und b die beiden Lösungen der Gleichung $\ln x = p \cdot x$, so lassen sich ihre Werte somit bestimmen, wenn man p kennt. Man kann aber ganz allgemein aus einer der drei Zahlen a , b und

Abbildung 2: Graphen der Funktion $\ln x$ und zweier linearer Funktionen

p die zwei anderen bestimmen. Ist beispielsweise $b = 3$ gegeben, so haben wir oben gesehen, dass $a = 2$ zu klein ist. Mit dem graphikfähigen Taschenrechner bekommt man aus $p = \frac{\ln b}{b} = \frac{\ln 3}{3}$ die Zahl $a \approx 2.4780527$. Die Werte von a^b und b^a sind 15.21709018 beziehungsweise 15.21709015.

Zum Schluss schauen wir uns nochmals das spezielle Paar $a = 2$ und $b = 4$ an. Es muss $\ln 2 = p \cdot 2$ und $\ln 4 = p \cdot 4$ für dieselbe Zahl p gelten. Das stimmt auch, denn für dieses p gilt gemäss Logarithmengesetzen $p = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{\ln 2}{2} = \frac{2 \cdot \ln 2}{2 \cdot 2} = \frac{\ln 2^2}{2 \cdot 2} = \frac{\ln 4}{4}$. Diese beiden natürlichen Zahlen verdanken ihre spezielle Eigenschaft also der Tatsache, dass $2^2 = 2 \cdot 2$ gilt.

5 Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen

Es gibt zwar nur ein Zahlenpaar a und b bestehend aus natürlichen Zahlen, das die Gleichung $a^b = b^a$ erfüllt, aber es gibt unendlich viele Paare im Bereich der reellen Zahlen, denn jede reelle Zahl $x > 1$ ausser e gehört genau zu einem solchen Zahlenpaar. Definiert man die Funktion $k(x)$ als diejenige Zahl y , für die $x^y = y^x$ gilt, und setzt man $k(e) = e$, so bildet k die Menge $D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ x > 1\}$ bijektiv auf die Menge D ab. Es gilt sogar $k^{-1} = k$. Diese Funktion ist auch stetig, denn verschiebt man die Gerade $y = \frac{1}{e}$ in Abbildung 1 kontinuierlich parallel nach unten, so ändern sich die x -Koordinaten der Schnittpunkte mit $f(x)$ ebenfalls kontinuierlich. (Die Definition $k(e) = e$ ist nicht einfach einer der trivialen Fälle $a^b = b^a$ für $a = b$, sondern kommt vom Zusammenfallen der beiden Schnittstellen der Geraden $y = \frac{1}{e}$ mit $f(x)$.)

Vergleicht man die Potenzfunktion $x \mapsto x^a$ mit der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$, so gibt die Grösse $k(a)$ den x -Wert an, für welche die beiden Funktionen den gleichen Funktionswert liefern und sich die Graphen der Potenzfunktion und der Exponentialfunktion somit schneiden. Für kleinere x -Werte als $k(a)$ ist die Potenzfunktion $x \mapsto x^a$ grösser, und für grössere Werte ist die Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ grösser.

Aha! Mathematik! – Teil III.**Achtung: Bestimmtes Integral!**

Urs Stammbach

Das bestimmte Integral von a nach b über die Funktion f berechnet man, indem man den Wert der Stammfunktion F von f an der unteren Grenze b vom Wert der Stammfunktion an der oberen Grenze a subtrahiert.

So steht es – gewöhnlich schön eingerahmt – in den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Fritzli, der Gymnasiast, hatte sein Lehrbuch gut studiert und er glaubte auch gerne, was da drin stand. Schliesslich folgte seine Mathematiklehrerin in der Schulstunde fast immer dem Text des Lehrbuches, und sie musste es ja wohl wissen! Fritzli beschloss, zur Übung gleich ein Beispiel zum Thema “Bestimmte Integrale” zu machen, und er gab sich das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx$$

vor. In der Tat standen heute morgen in der Mathematikstunde die Stammfunktionen der Potenzfunktionen mit negativen Exponenten auf dem Programm. Fritzli hatte sich über die seltsame Ausnahme bei der Funktion $1/x$ gewundert. Das hatte er noch nicht ganz verstanden. Aber bei $1/x^2$ gab es ja kein Problem. Er rechnete nach den Vorgaben des Lehrbuchs

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{+1} = -\frac{1}{+1} - \left(-\frac{1}{-1} \right) = -1 - 1 = -2 .$$

Wunderbar, dachte Fritzli. Ob das die andern in der Klasse auch schon beherrschten? Aber plötzlich trübte sich Fritzli’s Blick: War das wirklich richtig? Waren die Werte der Funktion $1/x^2$ als Quadrate nicht für alle Werte von x positiv? Musste das nicht dazu führen, dass sich die Fläche unter der Kurve ganz oberhalb der x -Achse befand? Und er hatte doch gelernt, dass das bestimmte Integral den Inhalt der Fläche unter der Kurve beschreibt, wobei die Inhalte der Flächenstücke oberhalb der x -Achse positiv zu zählen sind. Was ging hier vor? Fritzli zweifelte nicht daran, dass im Lehrbuch nur Richtiges stand. Er beschloss, dort noch einmal nachzusehen, und da stand tatsächlich oberhalb der eingerahmten Regel noch etwas, die Voraussetzung nämlich, dass *die zu integrierende Funktion im Integrationsintervall definiert und stetig zu sein hatte*. War bei seinem Beispiel möglicherweise in dieser Beziehung etwas nicht in Ordnung? Fritzli versuchte, die Funktion $1/x^2$ aufzuzeichnen. Tatsächlich: Bei $x = 0$ war der Ausdruck $1/x^2$ gar nicht definiert, und darüber hinaus wurden die Werte dieser Funktion für x in der Nähe von 0 beliebig gross. Nicht einmal der Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

existierte. Wie lautete schon wieder der genaue mathematische Ausdruck dafür? Fritzli erinnerte sich: *Die Funktion $1/x^2$ hat bei $x = 0$ eine Singularität.* Fritzli beschloss, in der nächsten Mathematikstunde seine Mathematiklehrerin auf das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx$$

anzusprechen und sie zu bitten, ihm das vorzurechnen.

Es sei zum Schluss dieser Geschichte verraten, dass die Lehrerin gleich sah, dass es sich hier wegen der Singularität des Integranden bei $x = 0$ um ein sogenanntes *uneigentliches Integral* handelte. Und sie zeigte Fritzli, wie in diesem Fall eine genauere Untersuchung anzustellen ist. Man müsse zuerst das Integral

$$\int_0^{+1} \frac{1}{x^2} dx$$

diskutieren; wenn man die Fläche unter der Kurve betrachte, so sei klar, dass dies genau die Hälfte des Wertes des ursprünglichen Integrals ergäbe. Zur Diskussion wähle man an Stelle von 0 zuerst eine unteren Grenze a , $a > 0$ und mache dann den Grenzübergang $a \rightarrow 0$, man berechne also

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_a^{+1} \frac{1}{x^2} dx \right).$$

Da zeige sich dann – die Details könne sie sicher Fritzli überlassen –, dass dieser Limes gar nicht existiere, bzw. dass er unendlich sei. Man könne deshalb auch sagen, dass der Wert von Fritzli's Integral unendlich sei!

Ist es überraschend, dass Fritzli weiterhin mit Freude am Mathematikunterricht teilnahm?

Frantz, Marc, Annalisa Crannell: Viewpoints: mathematical perspective and fractal geometry in art. Princeton University Press, 2011, ISBN 978-0-691-12592-3

Zuerst einmal: Das Buch gehört zu den schönen Büchern, die man gerne in die Hand nimmt und aufschlägt. Und wenn man es aufgeschlagen hat, so liest man gerne darin. Und wenn man darin liest, so freut man sich an der Sorgfalt und Qualität des Textes und des Layouts.

Das Buch führt in drei Themen ein. Zuerst werden die Grundlagen des perspektivischen Skizzierens in 1-, 2- und 3-Fluchtpunkt-Perspektive vorgestellt und mathematisch erklärt. Dann wird gezeigt, wie anamorphe Bilder hergestellt werden können. Bei solchen Bildern werden in eine im Ganzen realistische Darstellung Bildteile eingewoben, die sich einem erst erschliessen, wenn man sie aus einem ungewöhnlichen Blickwinkel betrachtet. Als Drittes werden die Grundlagen der fraktalen Geometrie und ihre Anwendung bei der Modellierung von Landschaften vorgestellt. Damit gelingt den Autoren implizite auch eine Einführung in die heute omnipräsente Computergrafik.

Das Buch ist ein künstlerischer Text. Es vertieft auf sympathische, innovative Art das Wissen über zeitgenössische Kunst, indem jedes Kapitel mit einem Essay eines zeitgenössischen Künstlers abschliesst. In diesen Essays erzählen die Künstlerinnen aus ihrem Werdegang und schildern den Stellenwert, den die Perspektive bzw. die fraktale Geometrie in ihrer Arbeit hat. Das ist aufschlussreich für angehende Künstlerinnen, aber auch für interessierte Laien. Die beigezogenen Künstler sind Teil der aktuellen (amerikanischen) Kunstlandschaft und ihre Essays zeigen, wie vielfältig das heutige Kunstschaffen ist.

Das Buch ist ein mathematischer Text. Die Autoren sind Mathematiker, das merkt man daran, dass alle Dinge in guter mathematischer Tradition lückenlos aus grundlegenden Konzepten entwickelt werden. Die Leistung der Autoren dabei ist, dass sie immer nur so viel mathematische Begriffe und mathematisches Wissen beiziehen, wie es zur Begründung (und damit zum Verständnis) unabdingbar ist. Dabei werden keine letztlich unverständlichen Abkürzungen eingeschlagen und wenn die grundlegenden Konzepte nicht elementar sind, werden sie sorgfältig erklärt. So gibt der Text auch Menschen ohne grosses mathematisches Vorwissen die Möglichkeit, die Sache zu verstehen und daraus Freude zu beziehen.

Das Buch ist ein didaktischer Text. Primär gedacht und gemacht ist das Werk für Lehrpersonen an Kunsthochschulen und Akademien. Für Mathematik-Lehrpersonen ist die Lektüre ein Vergnügen, weil man sich dafür interessiert, wie die Autoren ihren Anspruch auf Verständlichkeit und Anschaulichkeit eingelöst haben. Es ist sehr anregend, die eigenen didaktischen Konzepte mit denjenigen der Autoren zu vergleichen.

Marco Bettinaglio
MNG Rämibühl, Zürich

Vom Kindergarten bis zur Hochschule – Mathematik im Unterricht heute

Zentrale Aspekte des Mathematiklernens gelten vom Kindergarten bis zur Hochschule. In dieser neuen Vortragsreihe der Fachbereiche Mathematik der PH Zürich und der ETH Zürich soll vorgestellt werden, was für den Mathematikunterricht aller Stufen wesentlich ist – theoretisch fundiert und praktisch illustriert. Diese Veranstaltung richtet sich an Lehrpersonen aller Stufen sowie an Mathematikunterricht Interessierte.

Donnerstag, 24. Januar 2013 in Zürich

17:15 bis 18:45 Uhr Vortrag mit anschließendem Apéro (Eintritt frei)

Alexander Renkl (Freiburg i. Br.):

Lernen aus Lösungsbeispielen – oder warum man vor dem Tun erst Denken sollte!

Lernen aus Lösungsbeispielen meint, dass den Lernenden Aufgaben mit Lösungen dargeboten werden, die von den Schülerinnen und Schülern nachvollzogen werden sollen. Dieser Lernmethode haftet bisweilen ein schlechter Ruf an. Sie wird als "veraltet" betrachtet, da sie die Schülerinnen und Schüler in eine passive Rolle drängt und allenfalls zu oberflächlichem Wissen über „Lösungsrezepte“ führt.

In vielen kognitionswissenschaftlichen und psychologischen Arbeiten hingegen strebt man mit Lösungsbeispielen gewissermaßen genau das Gegenteil an, nämlich ein vertieftes konzeptuelles Verständnis, das es den Schülerinnen und Schülern erlaubt, auch Probleme zu lösen, für die sie keine „fertige“ Lösungsmethode parat haben. Tatsächlich ist es so, dass die resultierenden Lerneffekte beim Lernen aus Lösungsbeispielen von der Art, wie diese Lernmethode realisiert wird, abhängen.

Wie und warum man mit Lösungsbeispielen bedeutungshaltiges Lernen in der Mathematik fördern kann und welche "Stellschrauben" dabei unbedingt zu beachten sind, wird eingehend diskutiert und an Beispielen aus unterschiedlichen Schulstufen aufgezeigt.

Prof. Dr. Alexander Renkl ist Pädagogischer Psychologe von der Universität Freiburg im Breisgau. Er beschäftigt sich aus einer kognitionswissenschaftlich orientierten Perspektive mit der Frage, wie effektive Lernprozesse aussehen und wie sie unterstützt werden können. Eines seiner Hauptforschungsgebiete ist dabei das Lernen aus Lösungsbeispielen, zu dem er zahlreiche grundlagenwissenschaftliche und angewandte Arbeiten veröffentlicht hat.



Herzlich laden ein

Norbert Hungerbühler (ETH Zürich) und
René Schelldorfer (PH Zürich)

Veranstaltungsort

PH Zürich (neuer Campus, gleich beim HB Zürich)
Gebäude LAA, Raum J002a
Lagerstr. 2, 8090 Zürich



Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: aktiv/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout – *Mise en page*

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Inserateverwaltung – *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

Ganzseitige Fr. 500.–
Halbseitige Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :

VSG – SSPES – SSISS

Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)

3000 Bern

Tel. 056 443 14 54 / Fax 056 443 06 04

E-Mail: information@vsg-sspes.ch

Abonnenten, die nicht Mitglieder des VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch

Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770

6005 Luzern

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsident VSMP – SSPMP – SSIMF

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
3005 Bern

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Gordana Gerber gordana.gerber@gymalp.ch
Chemin du Petit-Clos 15 Tél. 032 342 42 94
1815 Clarens-Montreux

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 122	31.03.2013 (20.05.2013)
Nr. 123	31.07.2013 (20.09.2013)
Nr. 124	30.11.2013 (20.01.2014)

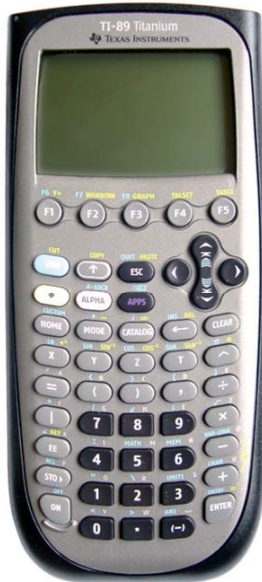
Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Taschenrechner zu günstigen Konditionen



Unsere Offerte kostet Sie nichts und Ihre SchülerInnen weniger.

Rücknahme überzähliger Rechner. Nachlieferung. Unterstützung bei Reparatur- und Garantiefällen.

Technische und fachliche Unterstützung durch erfahrene Lehrpersonen.
info@lernonline.ch

056 427 42 40

